forall x: Dortmund

Eine Einführung in die formale Logik

Von **P. D. Magnus**
Tim Button
Aaron Thomas-Bolduc
Richard Zach
mit Ergänzungen von
J. Robert Loftis
Robert Trueman
überarbeitet und übersetzt von
Simon Wimmer

Winter 2020

Der LaTeX Quellcode für dieses Buch ist auf GitHub verfügbar. Ein vollständiges PDF wird nach Abschluss der Übersetzung/Überarbeitung auf simonwimmer.weebly.com verfügbar gemacht.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Wie Sie dem Titel entnehmen können, handelt es sich hier um eine Einführung in die formale Logik. Die formale Logik befasst sich mit einer bestimmten Art von Sprache. Sie ist eine formale Sprache, d.h. ihre Ausdrücke (z.B. Sätze) sind formal definiert. Das macht sie zu einer sehr nützlichen Sprache, um die Sachverhalte, von denen ihre Sätze handeln, sehr genau zu beschreiben. In der formalen Logik ist es unmöglich, mehrdeutig zu sein. Im Zentrum der Arbeit zu formalen Sprachen steht die Folgebeziehung zwischen Sätzen, d.h. welche Sätze aus welchen anderen Sätzen folgen. Die Folgebeziehung ist von zentraler Bedeutung, weil wir durch ein besseres Verständnis dieser Beziehung erkennen können, wann bestimmte Dinge der Fall sein müssen, wenn andere Dinge der Fall sind. Aber die Folgebeziehung ist nicht der einzige wichtige Begriff der formalen Logik. Wir werden noch einige weitere kennen lernen.

Die formale Logik ist ein zentraler Teil der Philosophie, wo die logische Beziehung von Prämissen zu den aus ihnen gewonnenen Schlussfolgerungen wichtig ist. Philosoph*innen untersuchen die Konsequenzen von Definitionen und Annahmen und bewerten sie auf der Grundlage ihrer Konsequenzen. Die formale Logik ist auch in der Mathematik und Informatik von Bedeutung. In der Mathematik werden formale Sprachen verwendet, um nicht “alltägliche”, sondern mathematische Sachverhalte zu beschreiben. Auch Mathematiker*innen interessieren sich für die Folgen von Definitionen und Annahmen und für sie ist es ebenso wichtig, diese Folgen (die sie ‘Theoreme’ nennen) mit präzisen Methoden zu bestimmen. Die formale Logik stellt solche Methoden zur Verfügung. In der Informatik wird die formale Logik angewandt, um den Zustand und das Verhalten von Rechensystemen, z.B. Schaltkreisen, Programmen, Datenbanken usw., zu beschreiben. Methoden der formalen Logik werden auch verwendet, um die Konsequenzen solcher Beschreibungen festzustellen, z.B. ob eine Schaltung fehlerfrei ist, ob ein Programm das tut, was es tun soll, oder ob eine Datenbank konsistent ist.

Das Lehrbuch ist in acht Teile gegliedert. Teil I führt auf informelle Weise in das Thema und die Begriffe der Logik ein, noch ohne Bezug auf eine formale Sprache. Die Teile II–IV behandeln wahrheitsfunktionale Sprachen. Darin werden komplexe Sätze aus einfachen Sätzen mittels Junktoren (‘oder’, ‘und’, ‘nicht’, ‘wenn. . . , dann. . . ’) gebildet, die einfache Sätze zu komplizierteren Sätzen zusammenfügen. Wir diskutieren logische Begriffe, wie z.B. die Folgebeziehung auf zwei Arten: semantisch mit der Methode der Wahrheitstabellen (in Teil III) und beweistheoretisch mit einem System formaler Herleitungen (in Teil IV). Die Teile V–VII führen eine kompliziertere Sprache ein: die Logik erster Ordnung. Sie umfasst neben den Junktoren der wahrheitsfunktionalen Logik auch Namen, Prädikate, Identität und die sogenannten Quantoren. Diese zusätzlichen Elemente erlauben uns, mehr als mittels der wahrheitsfunktionalen Sprache auszusagen. Wir werden untersuchen, wie viel genau man mittels der Logik der ersten Ordnung ausdrücken kann. Auch hier werden wir logische Begriffe semantisch, mit Hilfe von Interpretationen, und beweistheoretisch, mit Hilfe einer komplexeren Version des in Teil IV eingeführten formalen Herleitungssystems definieren. In Teil VIII diskutieren wir schließlich die modale Logik, welche die wahrheitsfunktionale Logik durch nicht-wahrheitsfunktionale Operatoren für Möglichkeit und Notwendigkeit ergänzt.

Im Anhang finden Sie eine Liste, in der wichtige Regeln und Definitionen aufgeführt sind. Zentrale Begriffe sind in einem Glossar am Ende aufgelistet.

Dieses Buch basiert auf einem englisch-sprachigem Text, der ursprünglich von P.D. Magnus geschrieben wurde, von Tim Button überarbeitet und erweitert wurde, und zuletzt auch von Aaron Thomas-Bolduc und Richard Zach in Teilen umgeschrieben und um verschiedene Materialien ergänzt wurde. Spezifisch integrierten Aaron Thomas-Bolduc und Richard Zach Material (hauptsächlich Übungen) von J. Robert Loftis und ergänzten Teil VIII, der auf Notizen von Robert Trueman basiert. (Ihr Text enthält auch Material, welches auf zwei Kapiteln aus Tim Buttons offenem Text *Metatheorie* basiert, welches aber nicht in der hier präsentierten Fassung des Buchs vorkommt.) Der resultierende Text steht unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0-Lizenz. Ich bedanke mich bei Daniel Foelsch für seine Hilfe beim Korrekturlesen.

TEIL I

Zentrale Begriffe der Logik

KAPITEL 1
Argumente

Die Logik ist für das Bewerten von Argumenten zuständig; für das Unterscheiden von guten und schlechten Argumenten.

Ein Argument, wie wir es verstehen werden, ist so etwas wie das hier:

> Entweder hat es der Butler getan oder der Gärtner.
> Der Butler hat es nicht getan.
> ∴ Der Gärtner hat es getan.

Wir haben hier eine Reihe von Sätzen. Die drei Punkte in der dritten Zeile des Arguments werden als ‘Also’ gelesen. Sie zeigen an, dass der letzte Satz die *Schlussfolgerung* des Arguments ist. Die beiden Sätze davor sind die *Prämissen* des Arguments. Wir nennen jede Reihen von Sätzen, die sich aus Prämissen und einer Schlussfolgerung zusammen setzt, ein Argument.

In diesem Teil erörtern wir einige grundlegende logische Begriffe, die auf Argumente anwendbar sind. Es ist wichtig, mit einem klaren Verständnis davon zu beginnen, was Argumente sind und was es bedeutet, dass ein Argument gültig ist. Später werden wir Argumente aus dem Deutschen in einer formalen Sprachen symbolisieren. Wir wollen, dass die formale Gültigkeit, wie sie in der formalen Sprache definiert ist, zumindest einige der wichtigen Merkmale der Gültigkeit in unserer Anfangssprache, dem Deutschen, aufweist.

Im eben genannten Beispiel haben wir einzelne Sätze verwendet, um die beiden Prämissen des Arguments auszudrücken, und einen dritten Satz, für die Schlussfolgerung des Arguments. Zwar drücken wir viele Argumente auf diese Weise aus, aber auch ein einzelner Satz kann ein vollständiges Argument liefern. Zum Beispiel:

> Der Butler hat ein Alibi, also kann er es nicht getan haben.

Dieses Argument hat eine Prämisse, gefolgt von einer Schlussfolgerung.

Viele Argumente beginnen mit einer Prämisse und enden mit einer Schlussfolgerung. Aber nicht alle. Das Argument vom Anfang dieses Abschnitts könnten wir auch mit der Schlussfolgerung zu Beginn präsentieren:

> Der Gärtner hat es getan. Schließlich war es entweder der Butler oder der Gärtner. Und der Butler hat es nicht getan.

Genauso könnten wir die Schlussfolgerung auch in der Mitte anführen:

> Der Butler hat es nicht getan. Daher war es der Gärtner, denn es hat ja entweder der Gärtner oder der Butler getan.

Wenn wir uns mit einem Argument beschäftigen, wollen wir wissen, ob die Schlussfolgerung aus den Prämissen folgt. Als erstes müssen wir also die Schlussfolgerung von den Prämissen unterscheiden. Als Anhaltspunkt können wir die folgenden Worte nutzen, die oft verwendet werden, um die Schlussfolgerung eines Arguments anzuführen:

also, folglich, daher, deshalb, darum, demzufolge, deswegen

Aus diesem Grund können wir diese Worte SCHLUSSFOLGERUNGSWORTE nennen.

Im Gegensatz dazu sind die folgenden Ausdrücke PRÄMISSENWORTE, da sie oft darauf hinweisen, dass wir es mit einer Prämisse, und nicht mit einer Schlussfolgerung, zu tun haben:

da, denn, schließlich, weil, angesichts der Tatsache, dass

Trotz dieser Anhaltspunkte, gibt es bei der Analyse eines Arguments aber keinen Ersatz für eine gute Nase.

1.1 Sätze

Ganz allgemein können wir ein ARGUMENT als eine Reihe von Sätzen definieren. Die Sätze am Anfang der Reihe sind Prämissen. Der letzte Satz in der Reihe ist die Schlussfolgerung.

In der Logik sind wir nur an Sätzen interessiert, die als Prämisse oder Schlussfolgerung eines Arguments fungieren können, d.h. an Sätzen, die wahr oder falsch sein können. Wir werden uns also auf solche Sätze beschränken und einen SATZ als einen Satz definieren, der wahr oder falsch sein kann.

Sie sollten die Wahrheitswertfähigkeit eines Satzes nicht mit dem Unterschied zwischen Tatsache und Meinung verwechseln. Oft drücken Sätze in der Logik Dinge aus, die Tatsachen sein könnten, wie z.B. ‘Kierkegaard hatte einen Buckel’ oder ‘Kierkegaard mochte Mandeln’. Aber sie können natürlich auch Dinge ausdrücken, die man als Meinung bezeichnen könnte, z.B. ‘Koriander ist lecker’. Mit anderen Worten: Ein Satz wird nicht deshalb als Teil eines Arguments disqualifiziert, weil wir nicht wissen, ob er wahr oder falsch ist, oder weil seine Wahrheit oder Falschheit eine Frage der Meinung ist. Wenn er die Art von Satz ist, die wahr oder falsch sein kann, kann er die Rolle einer Prämisse oder Schlussfolgerung spielen.

Es gibt auch Dinge, die in einem Sprachkurs oder der Sprachwissenschaft als ‘Sätze’ gelten würden, die wir in der Logik aber nicht als Sätze zählen werden.

Fragen In der Sprachwissenschaft würde ‘Sind Sie schon müde?’ als Fragesatz zählen. Obwohl Sie vielleicht schläfrig oder wach sind, ist die Frage selbst weder wahr noch falsch. Aus diesem Grund zählen Fragen in der Logik nicht als Sätze. Angenommen, Sie beantworten die Frage, indem Sie sagen ‘Ich bin nicht müde'. Dies ist entweder wahr oder falsch und ist daher ein Satz im logischen Sinn. Im Allgemeinen zählen *Fragen* nicht, aber *Antworten* schon, als Sätze. 'Worum geht es in dieser Vorlesung?' ist kein Satz (in unserem Sinne). 'Niemand weiß, worum es in dieser Vorlesung geht' ist ein Satz.

Befehle Befehle werden oft als Imperative formuliert wie 'Wach auf!', 'Setz dich gerade hin!' und so weiter. In der Sprachwissenschaft würden diese als Imperativsätze zählen. Auch wenn es für Sie gut sein mag, gerade zu sitzen, ist der Befehl weder wahr noch falsch. Beachten Sie jedoch, dass Befehle nicht immer als Imperative formuliert werden. 'Sie werden meine Autorität respektieren' ist entweder wahr oder falsch — entweder Sie tun es oder Sie tun es nicht — und so zählt es als Satz im logischen Sinne.

Exklamationen 'Aua!' wird manchmal als ein Ausrufesatz bezeichnet, aber er ist weder wahr noch falsch. Wir werden 'Aua, ich habe mir den Zeh verletzt!' so behandeln, dass es dasselbe bedeutet wie 'Ich habe mir den Zeh verletzt'. Wenn 'Aua' so wie hier auftritt, fügt es nichts hinzu, was wahr oder falsch sein könnte.

Übungen

Am Ende vieler Kapitel gibt es Übungen, die das im jeweiligen Kapitel behandelte Material wiederholen. Es gibt keinen Ersatz dafür, einige dieser Probleme durchzuarbeiten, denn beim Lernen der Logik geht es mehr darum, eine Denkweise zu entwickeln, als darum, sich Fakten einzuprägen.

Hier ist nun die erste Übung. Markieren Sie den Satz, der die Schlussfolgerung des jeweiligen Arguments ausdrückt.

1. Es ist kalt. Ich sollte also meine Haube mitnehmen.
2. Es muss kalt gewesen sein. Schließlich trug ich ja meine Haube.

3. Niemand außer dir hatte die Hände in der Keksdose. Und der Tatort ist mit Kekskrümeln übersät. Du bist der Schuldige!
4. Herr Scarlett und Professorin Plum waren zur Zeit des Mordes im Arbeitszimmer. Pfarrer Green hatte den Kerzenständer im Ballraum und wir wissen, dass kein Blut an seinen Händen war. Daher hat Oberst Mustard es in der Küche mit dem Bleirohr getan. Denn erinnere dich: die Waffe wurde nicht gefeuert.

KAPITEL 2
Der Geltungsbereich der Logik

2.1 Folge und Gültigkeit

In §1 betrachteten wir Argumente, d.h. Ansammlungen von Prämissen, gefolgt von einer Schlussfolgerung. Wir sagten, dass manche Worte wie ‘also’ anzeigen, welche Sätze als Schlussfolgerungen zu verstehen sind. ‘Also’ suggeriert natürlich, dass es einen Zusammenhang zwischen den Prämissen und der Schlussfolgerung gibt, nämlich, dass die Schlussfolgerung von den Prämissen *folgt* oder *eine Folge* der Prämissen ist.

Dieser Begriff der Folge ist einer der wichtigsten, mit denen sich die Logik befasst. Man könnte sogar sagen, dass die Logik die Wissenschaft von dem ist, was aus was folgt. Die Logik entwickelt Theorien und Werkzeuge, die uns sagen, wann ein Satz aus einigen anderen Sätzen folgt.

Was sollten wir über das Hauptargument sagen, das wir in §1 diskutierten?

Entweder der Butler oder der Gärtner hat es getan.
Der Butler hat es nicht getan.
∴ Der Gärtner hat es getan.

Wir haben keinen Kontext dafür, worauf sich die Sätze in diesem Argument beziehen. Vielleicht vermuten Sie, dass ‘hat es getan' hier bedeutet, 'war der Täter eines nicht näher bezeichneten Verbrechens'. Sie könnten sich vorstellen, dass das Argument in einem Krimi oder einer Fernsehsendung vorkommt, vielleicht von einem/r Detektiv*in vorgetragen, der/die die Beweislage durchdenkt. Aber selbst ohne diese Informationen zu haben, stimmen Sie wahrscheinlich zu, dass das Argument insofern gut ist, als die Schlussfolgerung wahr sein muss, wenn beide Prämissen wahr sind, unabhängig davon, was die Prämissen genau aussagen. Wenn die erste Prämisse wahr ist, d.h. wenn es wahr ist, dass der Butler es getan hat oder der Gärtner es getan hat, dann hat mindestens einer von ihnen 'es getan', was auch immer das genau bedeutet. Und wenn die zweite Prämisse wahr ist, dann hat der Butler es nicht 'getan', was auch immer das genau bedeutet. Aber nun bleibt nur eine Möglichkeit: 'der Gärtner hat es getan' muss wahr sein, was auch immer das genau bedeutet. Hier folgt die Schlussfolgerung aus den Prämissen. Wir nennen Argumente, die diese Eigenschaft haben, GÜLTIG.

Betrachten Sie dagegen das folgende Argument:

Wenn die Fahrerin es getan hat, dann hat der Putzmann es nicht getan.
Der Putzmann hat es nicht getan.
∴ Die Fahrerin hat es getan.

Wir haben auch hier keine Ahnung, wovon genau die Rede ist. Aber dennoch stimmen Sie wahrscheinlich zu, dass sich dieses Argument in einem wichtigen Punkt von dem vorhergehenden unterscheidet. Wenn die Prämissen wahr sind, ist in diesem Fall nicht garantiert, dass die Schlussfolgerung auch wahr ist. Die Prämissen dieses Arguments schließen, für sich genommen, nicht aus, dass jemand anderes als der Putzmann oder die Fahrerin 'es getan hat'. Es gibt also einen Fall, in dem beide Prämissen wahr sind, die Fahrerin es aber nicht getan hat, d.h. die Schlussfolgerung nicht wahr ist. In diesem zweiten Argument folgt die Schlussfolgerung nicht aus den Prämissen. Wenn, wie in diesem Argument, die Schlussfolgerung nicht aus den Prämissen folgt, sagen wir, dass es UNGÜLTIG ist.

2.2 Fälle und Arten der Gültigkeit

Wie konnten wir feststellen, dass das zweite Argument ungültig ist? Wir wiesen auf einen möglichen Fall hin, in dem die Prämissen wahr sind und die Schlussfolgerung nicht wahr ist. Dies war ein Fall, in dem weder die Fahrerin noch der Putzmann, sondern eine dritte Person es tat. Wir nennen einen solchen Fall ein GEGENBEISPIEL zu unserem Argument. Wenn es ein Gegenbeispiel zu einem Argument gibt, dann folgt die Schlussfolgerung nicht aus den Prämissen. Damit die Schlussfolgerung eine Folge der Prämissen ist, muss die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Schlussfolgerung garantieren. Aber wenn es ein Gegenbeispiel gibt, dann garantiert die Wahrheit der Prämissen nicht die Wahrheit der Schlussfolgerung.

Als Logiker*innen wollen wir in der Lage sein, zu bestimmen, wann die Schlussfolgerung eines Arguments aus den Prämissen dieses Arguments folgt. Und die Schlussfolgerung ist eine Folge der Prämissen, wenn es kein Gegenbeispiel gibt – keinen möglichen Fall, in dem die Prämissen alle wahr sind, die Schlussfolgerung aber nicht. Dies motiviert unsere Definition der Folgebeziehung:

> Ein Satz A ist eine FOLGE von Sätzen $B_1, \ldots, B_n$ wenn und nur wenn es keinen Fall gibt, in dem $B_1, \ldots, B_n$ alle wahr sind und A nicht wahr ist. (Wir sagen auch, dass A aus B_1, …, B_n folgt oder, dass $B_1, \ldots, B_n$ A zur Folge haben.)

Diese Definition ist unvollständig: sie sagt uns nicht, was ein ‘Fall’ ist oder was es bedeutet, in einem Fall ‘wahr’ oder ‘nicht wahr’ zu sein. Bislang haben wir nur ein Beispiel gesehen: ein hypothetisches Szenario mit drei Personen. Von den drei Personen in diesem Szenario – eine Fahrerin, ein Putzmann und eine dritte Person – haben die Fahrerin und der Putzmann es nicht getan; anders als die dritte Person. In diesem Szenario, hat die Fahrerin es nicht getan. Daher ist es ein Fall, in dem der Satz ‘die Fahrerin war es’ nicht wahr ist. Die Prämissen unseres zweiten Arguments sind wahr, aber die Schlussfolgerung nicht: Das Szenario ist ein Gegenbeispiel zu unserem Argument.

Wir haben gesagt, dass Argumente, deren Schlussfolgerung eine Folge der Prämissen ist, gültig sind und Argumente, deren Schlussfolgerung keine Folge der Prämissen ist, ungültig sind. Da wir nun eine erste Definition der Folgebeziehung haben, können wir nun auch eine erste Definition der Gültigkeit/Ungültigkeit eines Arguments geben:

> Ein Argument ist GÜLTIG wenn und nur wenn die Schlussfolgerung eine Folge der Prämissen ist.

> Ein Argument ist UNGÜLTIG wenn und nur wenn es nicht gültig ist, d.h., es ein Gegenbeispiel zum Argument gibt.

Eine Aufgabe von Logiker*innen ist es, den Begriff des Falls zu präzisieren und zu untersuchen, welche Argumente gültig sind, wenn dieser Begriff auf die eine oder andere Weise präzisiert wird. Wenn wir unter einem Fall ein mögliches Szenario verstehen, wie das Gegenbeispiel zum zweiten Argument, ist klar, dass das erste Argument gültig ist. Denn wenn wir uns ein Szenario vorstellen, in dem entweder der Butler oder der Gärtner es getan hat und der Butler es nicht getan hat, dann stellen wir uns automatisch ein Szenario vor, in dem der Gärtner es getan hat. Jedes mögliche Szenario, in dem die Prämissen unseres ersten Arguments wahr sind, macht also automatisch die Schlussfolgerung unseres ersten Arguments wahr. Das ist der Grund dafür, dass das erste Argument gültig ist.

Die Präzisierung des Begriffs des Falls, indem wir ihn als den Begriff eines möglichen Szenarios interpretieren ist ein Fortschritt. Aber sie ist nicht das Ende unserer Untersuchung. Das erste Problem ist, dass wir nicht wissen, welche Szenarien genau wir als möglich erachten sollen. Sind sie durch die Gesetze der Physik begrenzt? Durch das, was denkbar ist, in einem sehr allgemeinen Sinne? Welche Antworten wir auf diese Fragen geben, bestimmt, welche Argumente wir als gültig betrachten.

Nehmen Sie an, dass die Antwort auf unsere *erste* Frage 'Ja' lautet und betrachten Sie das folgende Argument:

Das Raumschiff *Rocinante* brauchte sechs Stunden um Jupiter von der Tycho Raumstation zu erreichen.
∴ Die Distanz zwischen der Tycho Raumstation und Jupiter beträgt weniger als 14 Milliarden Kilometer.

Ein Gegenbeispiel zu diesem Argument wäre ein Fall, in dem die *Rocinante* eine Reise von über 14 Milliarden Kilometern in 6 Stunden macht und dabei die Lichtgeschwindigkeit überschreitet. Da ein solcher Fall mit den Gesetzen der Physik unvereinbar ist, gibt es keinen solchen Fall, wenn mögliche Szenarien mit den Gesetzen der Physik übereinstimmen müssen. Wenn mögliche Szenarien allerdings nicht durch die Gesetze der Physik begrenzt sind, gibt es ein Gegenbeispiel: ein Szenario, bei dem die *Rocinante* schneller als mit Lichtgeschwindigkeit reist.

Nehmen Sie nun an, dass die Antwort auf unsere *zweite* Frage 'Ja' lautet und betrachten Sie ein weiteres Argument:

Priya ist eine Ophtalmologin.
∴ Priya ist eine Augenärztin.

Wenn wir alle denkbaren Szenarien als möglich bezeichnen, dann ist dieses Argument gültig. Wenn man sich Priya als Ophtalmologin vorstellt, dann stellt man sich Priya automatisch auch als Augenärztin vor. Das ist genau das, was 'Ophtalmologin' und 'Augenärztin' bedeuten. Ein Szenario, in dem Priya eine Ophtalmologin, aber keine Augenärztin ist, wird durch die begriffliche Verbindung zwischen diesen Wörtern ausgeschlossen.

Je nachdem, welche Arten von Szenarien wir als Fälle und somit als potenzielle Gegenbeispiele betrachten, kommen wir also zu unterschiedlichen Theorien der Folgebeziehung und der Gültigkeit. Wir könnten ein Argument als NOMOLOGISCH GÜLTIG bezeichnen, wenn es keine Gegenbeispiele gibt, die mit den Naturgesetzen übereinstimmen. Ebenso könnten wir ein Argument als

BEGRIFFLICH GÜLTIG bezeichnen, wenn es keine Gegenbeispiele gibt, die mit den begrifflichen Verbindungen zwischen Wörtern übereinstimmen. Bei diesen beiden Begriffen der Gültigkeit bestimmen Eigenschaften der Welt (z.B. was die Naturgesetze sind) beziehungsweise Eigenschaften der Bedeutung der Worte die im Argument genutzt werden (z.B. der Bedeutung von 'Ophtalmologin' und 'Augenärztin'), ob ein Argument gültig ist.

2.3 Formale Gültigkeit

Ein Alleinstellungsmerkmal der *logischen* Folgebeziehung ist jedoch, dass sie nicht vom Inhalt der Prämissen und Schlussfolgerungen abhängt, sondern nur von deren logischer Form. Anders gesagt: als Logiker*in wollen wir eine Theorie entwickeln, die noch feinere Unterscheidungen treffen kann. Z.B., sowohl

Priya ist entweder eine Ophtalmologin oder eine Zahnärztin.
Priya ist keine Zahnärztin.
∴ Priya ist eine Augenärztin.

als auch

Priya ist entweder eine Ophtalmologin oder eine Zahnärztin.
Priya ist keine Zahnärztin.
∴ Priya ist eine Ophtalmologin.

sind gültige Argumente. Aber während die Gültigkeit des ersten Arguments von seinem Inhalt abhängt (d.h. von der Bedeutung von 'Ophtalmologin' und 'Augenärztin'), hängt die Gültigkeit des zweiten Arguments nicht von seinem Inhalt ab. Das zweite Argument ist FORMAL GÜLTIG. Wir können die 'Form' dieses Arguments als ein Muster beschreiben, etwa so:

A ist entweder eine X oder eine Y.
A ist keine Y.

$\therefore$ A ist eine X.

Hier sind A, X und Y Platzhalter für geeignete Ausdrücke, die, wenn sie für A, X und Y ersetzt werden, das Muster in ein aus Sätzen bestehendes Argument verwandeln. Beispielsweise ist

Mei ist entweder eine Mathematikerin oder eine Botanikerin.
Mei ist keine Botanikerin.
$\therefore$ Mei ist eine Mathematikerin.

ein Argument der gleichen Form. Das erste Argument in diesem Abschnitt hingegen ist es nicht: wir müssten Y in der Prämisse und der Schlussfolgerung durch verschiedene Ausdrücke ersetzen (einmal durch 'Ophtalmologin' und einmal durch 'Augenärztin'), um es aus dem Muster heraus zu kriegen.

Hinzu kommt, dass das erste Argument nicht formal gültig ist. Die Form dieses Arguments ist:

A ist entweder eine X oder eine Y.
A ist keine Y.
$\therefore$ A ist eine Z.

In diesem Muster können wir X durch 'Ophtalmologin' und Z durch 'Augenarzt' ersetzen, um das ursprüngliche Argument zu erhalten. Aber hier ist ein weiteres Argument der gleichen Form:

Mei ist entweder eine Mathematikerin oder eine Botanikerin.
Mei ist keine Botanikerin.
$\therefore$ Mei ist eine Akrobatin.

Dieses Argument ist klarerweise nicht gültig, da wir uns leicht eine Mathematikerin namens Mei vorstellen können, die keine Akrobatin ist. Dieses mögliche Szenario würde allerdings dafür sorgen, dass die erste Prämisse des Arguments wahr ist, und die Schlussfolgerung nicht.

Unsere Strategie als Logiker*innen wird sein, einen Begriff des Falls zu entwickeln, bei dem sich ein Argument als gültig erweist, wenn und nur wenn es formal gültig ist. Es ist klar, dass ein solcher Begriff des Falls nicht nur gegen einige Naturgesetze, sondern auch gegen einige Gesetze der deutschen Sprache verstoßen muss. Da das erste Argument in diesem Sinne ungültig ist, müssen wir als Gegenbeispiel einen Fall zulassen, in dem Priya Ophtalmologin, aber keine Augenärztin ist. Dieser Fall ist kein denkbares Szenario: er wird durch die Bedeutungen der Worte 'Ophtalmologin' und 'Augenärztin' ausgeschlossen.

Wenn wir Fälle verschiedener Art betrachten, um die Gültigkeit eines Arguments zu beurteilen, werden wir einige Annahmen machen. Die erste Annahme ist, dass jeder Fall jeden Satz wahr oder nicht wahr macht – zumindest jeden Satz in dem Argument, das wir gerade betrachten. Das bedeutet zunächst einmal, dass wir keine Szenarien als potenzielle Gegenbeispiele zulassen, die unbestimmt lassen, ob ein Satz unseres Arguments wahr ist oder nicht. Zum Beispiel wird ein Szenario, in dem Priya eine Zahnärztin, aber keine Augenärztin ist, als ein Fall gelten, der mit Bezug auf die ersten paar Argumenten dieses Abschnitts zu berücksichtigen ist, aber nicht als ein Fall, der mit Bezug auf die letzten zwei Argumente zu berücksichtigen ist. Denn dieses Szenario sagt uns nicht, ob Mei eine Mathematikerin, eine Botanikerin oder eine Akrobatin ist. Wenn ein Fall einen Satz nicht wahr macht, sagen wir, dass er ihn FALSCH macht. Wir nehmen also auch an, dass Fälle Sätze wahr oder falsch machen, aber niemals beides. Denn Sätze können nicht sowohl wahr als auch nicht wahr sein.[1]

[1] Obwohl unsere zwei Annahmen Ihnen wahrscheinlich vernünftig erscheinen, sind sie unter Philosoph*innen der Logik umstritten. Zunächst einmal gibt es Logiker*innen, die Fälle in Betracht ziehen wollen, in denen Sätze weder wahr noch falsch sind, sondern eine Art Zwischenebene der Wahrheit haben. Umstrittener ist die Meinung einiger Philosoph*innen, dass wir die Möglichkeit zulassen sollten, dass Sätze gleichzeitig wahr und falsch sein können. Es gibt logische Systeme, in denen Sätze weder wahr noch falsch oder beides sein können, aber wir werden sie in diesem Buch nicht diskutieren.

2.4 Korrekte Argumente

Bevor wir unsere Strategie umsetzen, sollten wir einige Sachen klarstellen. Argumente in folgendem Sinne, als Schlussfolgerungen, die aus Prämissen folgen sollen, werden im alltäglichen und wissenschaftlichen Diskurs häufig verwendet. Wenn dies der Fall ist, werden Argumente mit dem Ziel angeführt, ihre Schlussfolgerungen zu untermauern oder sogar zu beweisen. Nun, wenn ein Argument gültig ist, dann wird es seine Schlussfolgerung stützen, aber *nur dann*, wenn seine Prämissen alle wahr sind. Die Gültigkeit eines Arguments schließt die Möglichkeit aus, dass die Prämissen des Arguments wahr sind, während die Schlussfolgerung nicht wahr ist. Sie schließt aber nicht von sich aus die Möglichkeit aus, dass die Schlussfolgerung nicht wahr (also: falsch) ist. Anders gesagt: es ist durchaus möglich, dass ein gültiges Argument eine Schlussfolgerung hat, die falsch ist.

Ein Beispiel:

Orangen sind entweder Früchte oder Musikinstrumente.
Orangen sind keine Früchte.
∴ Orangen sind Musikinstrumente.

Die Schlussfolgerung dieses Arguments ist albern. Dennoch folgt sie von den Prämissen dieses Arguments. *Wenn* diese Prämissen wahr sind, *dann* muss die Schlussfolgerung auch wahr sein. Also ist das Argument gültig.

Umgekehrt reicht es nicht aus, über wahre Prämissen und eine wahre Schlussfolgerung zu verfügen, um ein gültiges Argument zu erhalten. Hierzu ein weiteres Beispiel:

London ist in England.
Peking ist in China.
∴ Paris ist in Frankreich.

Die Prämissen und Schlussfolgerungen dieses Arguments sind in der Tat alle wahr, aber das Argument ist ungültig. Würde Paris seine Unabhängigkeit vom Rest Frankreichs erklären, dann wäre die Schlussfolgerung nicht mehr wahr, auch wenn beide Prämissen weiterhin wahr wären. Es gibt also einen Fall, in dem die Prämissen dieses Arguments wahr sind, ohne dass die Schlussfolgerung wahr ist. Das Argument ist also ungültig.

Es ist wichtig, dass es bei der Gültigkeit nicht um die tatsächliche Wahrheit oder Falschheit der Sätze eines Arguments geht. Es geht darum, ob es *möglich* ist, dass alle Prämissen wahr sind und die Schlussfolgerung gleichzeitig nicht wahr ist. Was tatsächlich der Fall ist, spielt keine besondere Rolle; und was die Fakten sind, bestimmt normalerweise nicht, ob ein Argument gültig ist oder nicht. (Es hat einen Grund, wieso wir von 'normalerweise' sprechen: denn wenn die Prämissen eines Arguments tatsächlich wahr sind und die Schlussfolgerung tatsächlich nicht wahr ist, dann leben wir in einem Gegenbeispiel; hier bestimmt, was tatsächlich der Fall ist, dass das Argument ungültig ist.) Es wird oft gesagt, dass sich die Logik nicht um Gefühle schert. Eigentlich sind ihr auch die Fakten egal.

Wenn wir ein Argument benutzen, um zu beweisen, dass seine Schlussfolgerung wahr ist, dann brauchen wir zwei Dinge. Erstens muss das Argument gültig sein, d.h. die Schlussfolgerung muss aus den Prämissen folgen. Aber es muss auch der Fall sein, dass die Prämissen wahr sind. Wir werden sagen, dass ein Argument KORREKT ist, dann und nur dann, wenn es gültig ist und alle seine Prämissen wahr sind.

Die Kehrseite der Medaille ist, dass Sie, wenn Sie ein Argument widerlegen wollen, zwei Möglichkeiten haben: Sie können zeigen, dass (eine oder mehrere) der Prämissen nicht wahr sind, oder Sie können zeigen, dass das Argument nicht gültig ist. Die Logik hilft Ihnen aber nur bei Letzterem!

2.5 Induktive Argumente

Viele gute Argumente sind ungültig. Zum Beispiel:

> Bis jetzt hat es jeden Winter in Dortmund Frost gegeben.

∴ Auch im kommenden Winter wird es in Dortmund Frost geben.

Dieses Argument verallgemeinert Beobachtungen über viele (vergangene) Fälle zu einer Schlussfolgerung über alle (zukünftigen) Fälle. Solche Argumente werden als INDUKTIVE Argumente bezeichnet. Obwohl dieses Argument ein gutes ist, und wir Grund haben, die Schlussfolgerung des Arguments zu akzeptieren, wenn wir seine Prämisse akzeptieren, ist das Argument ungültig. Auch wenn es bisher jeden Winter Frost in Dortmund gegeben hat, bleibt es möglich, dass Dortmund den ganzen kommenden Winter frostfrei bleibt. Tatsächlich könnten wir uns, selbst wenn es fortan jeden Winter in Dortmund Frost gibt, immer noch einen Fall vorstellen, in dem dieses Jahr das erste Jahr ist, in dem es den ganzen Winter über frostfrei bleibt. Und dieses mögliche Szenario ist ein Fall, in dem die Prämissen des Arguments wahr sind, die Schlussfolgerung jedoch nicht. Daher ist das Argument ungültig.

Induktive Argumente – selbst gute induktive Argumente – sind nicht (deduktiv) gültig. Sie sind nicht *hieb- und stichfest*. Auch wenn es unwahrscheinlich ist, so ist es doch *möglich*, dass ihre Schlussfolgerung falsch ist, selbst wenn alle ihre Prämissen wahr sind. In diesem Buch werden wir die Frage, was ein gutes induktives Argument ausmacht, ganz beiseite lassen. Wir sind daran interessiert, die (deduktiv) gültigen Argumente von den ungültigen zu unterscheiden.

Übungen

A. Welche der folgenden Argumente sind gültig? Welche sind ungültig?

1. Sokrates ist ein Mensch.
2. Alle Menschen sind Karotten.

∴ Sokrates ist eine Karotte.

1. Abe Lincoln wurde entweder in Illinois geboren oder war einmal Präsident.

2. Abe Lincoln war nie Präsident.
∴ Abe Lincoln wurde in Illinois geboren.

1. Wenn ich den Abzug betätige, dann wird Abe Lincoln sterben.
2. Ich betätige den Abzug nicht.
∴ Also wird Abe Lincoln nicht sterben.

1. Abe Lincoln kam entweder aus Frankreich oder aus Luxemburg.
2. Abe Lincoln kam nicht aus Luxemburg.
∴ Abe Lincoln kam aus Frankreich.

1. Wenn die Welt heute untergeht, dann muss ich morgen nicht früh aufstehen.
2. Ich muss morgen früh aufstehen.
∴ Die Welt geht heute nicht unter.

1. Johann ist jetzt 19 Jahre alt.
2. Johann ist jetzt 87 Jahre alt.
∴ Ronja ist jetzt 20 Jahre alt.

B. Könnte es die folgenden Dinge geben?

1. Ein gültiges Argument mit einer falschen und einer wahren Prämisse.
2. Ein gültiges Argument, das nur falsche Prämissen hat.
3. Ein gültiges Argument, das nur falsche Prämissen und auch eine falsche Schlussfolgerung hat.
4. Ein ungültiges Argument, das man durch das Hinzufügen einer Prämisse gültig machen kann.
5. Ein gültiges Argument, das man durch das Hinzufügen einer Prämisse ungültig machen kann.

In jedem Fall: wenn die Antwort ‘Ja’ lautet, geben Sie ein Beispiel; falls die Antwort ‘Nein’ lautet, begründen Sie, wieso das so ist.

KAPITEL 3

Andere logische Begriffe

In §2 führten wir die Begriffe der Folge und eines gültigen Arguments ein. Diese Begriffe gehören zu den wichtigsten der Logik. In diesem Kapitel werden wir ähnlich bedeutende Begriffe einführen. Sie alle stützen sich, wie auch die Gültigkeit, auf die Idee, dass Sätze in Fällen wahr sind (oder nicht). Für den Rest dieses Kapitels verstehen wir Fälle als denkbare Szenarien, d.h. in dem Sinne, in dem wir sie zur Definition der begrifflichen Gültigkeit verstanden haben. Die Punkte, die wir zu den verschiedenen Arten von Gültigkeit gemacht haben, lassen sich auf ähnliche Weise auf unsere neuen Begriffe übertragen: Wenn wir eine andere Ansicht dazu haben, was als ‘Fall’ zählt, erhalten wir verschiedene präzisere Begriffe. Als Logiker*innen werden wir letztendlich eine andere Definition des Falles in Betracht ziehen, als wir es hier tun.

3.1 Gemeinsame Möglichkeit

Betrachten Sie die folgenden zwei Sätze:

B1. Eylems einziger Bruder ist kleiner als sie.
B2. Eylems einziger Bruder ist größer als sie.

Die Logik allein kann uns nicht sagen, welcher dieser beiden Sätze, wenn überhaupt, wahr ist. Dennoch können wir sagen, dass der zweite Satz (B2) falsch sein muss, *wenn* der erste Satz (B1) wahr ist. In ähnlicher Weise muss B1 falsch sein, wenn B2 wahr ist. Es gibt kein mögliches Szenario, in dem beide Sätze wahr sind. Diese Sätze sind miteinander inkompatibel, sie können nicht gleichzeitig wahr sein. Dies motiviert die folgende Definition:

> Sätze sind GEMEINSAM MÖGLICH wenn und nur wenn es zumindest einen Fall gibt, in dem sie alle wahr sind.

> Sätze sind GEMEINSAM UNMÖGLICH wenn und nur wenn sie nicht gemeinsam möglich sind, d.h. es keinen Fall gibt, in dem sie alle wahr sind.

B1 und B2 sind *gemeinsam unmöglich*, während, zum Beispiel, die folgenden zwei Sätze gemeinsam möglich sind:

B3. Eylems einziger Bruder ist kleiner als sie.
B4. Eylems einziger Bruder ist jünger als sie.

Wir können nach der gemeinsamen Möglichkeit einer beliebigen Anzahl von Sätzen fragen. Denken Sie zum Beispiel an die folgenden vier Sätze:

G1. Im Wildtierpark gibt es mindestens vier Giraffen.
G2. Es gibt genau sieben Gorillas im Wildtierpark.
G3. Es gibt nicht mehr als zwei Marsmenschen im Wildtierpark.
G4. Jede Giraffe im Wildtierpark ist ein Marsmensch.

Aus G1 und G4 zusammen folgt, dass sich mindestens vier Marsmenschen im Park aufhalten. Dies steht im Widerspruch zu Satz G3, der besagt, dass es dort nicht mehr als zwei Marsmenschen gibt. Die Sätze G1-G4 sind also gemeinsam unmöglich. Sie können nicht alle zusammen wahr sein. (Beachten Sie, dass auch die Sätze G1, G3 und G4 alleine schon gemeinsam unmöglich sind. Grundsätzlich gilt: wenn Sätze bereits gemeinsam unmöglich sind, kann das Hinzufügen eines zusätzlichen Satzes sie nicht gemeinsam möglich machen).

3.2 Notwendige Wahrheit, notwendige Falschheit und Kontingenz

Bei der Beurteilung von Argumenten, ob Ihrer Gültigkeit, interessiert uns, was wahr ist, *wenn* die Prämissen wahr sind. Aber einige Sätze müssen einfach wahr sein. Betrachten Sie diese Sätze:

1. Es regnet.
2. Entweder regnet es hier oder es regnet hier nicht.
3. Es regnet hier und es regnet hier nicht.

Um zu wissen, ob Satz 1 wahr ist, müssen Sie nach draußen schauen oder den Wetterkanal überprüfen. Er könnte wahr sein; er könnte falsch sein. Einen Satz, der sowohl wahr als auch falsch sein kann (natürlich unter jeweils anderen Umständen), nennen wir KONTINGENT.

Satz 2 unterscheidet sich von Satz 1. Sie müssen nicht nach draußen schauen, um zu wissen, dass dieser Satz wahr ist. Wie auch immer es um das Wetter steht, entweder regnet es hier oder es regnet hier nicht. Das ist eine NOTWENDIGE WAHRHEIT.

Ebenso brauchen Sie nicht das Wetter zu prüfen, um festzustellen, ob Satz 3 wahr ist oder nicht. Er muss falsch sein, einfach aus Gründen der Logik. Vielleicht regnet es hier und nicht in der ganzen Stadt; vielleicht regnet es jetzt, aber es hört auf zu regnen, während Sie diesen Satz lesen; aber es ist unmöglich, dass es am selben Ort und zur selben Zeit regnet und nicht regnet. Wie auch immer die Welt beschaffen ist, es ist nicht der Fall, dass es hier regnet und gleichzeitig nicht regnet. Dieser Satz ist eine NOTWENDIGE FALSCHHEIT.

Ein Satz könnte *immer* wahr und doch kontingent sein. Wenn es beispielsweise keine Zeit gab, in der das Universum weniger als sieben Dinge enthielt, dann war der Satz ‘Mindestens sieben Dinge existieren’ immer wahr. Doch der Satz ist kontingent: Die Welt hätte viel, viel kleiner sein können, als sie ist. Dann jedoch wäre der Satz falsch gewesen.

3.3 Notwendige Äquivalenz

Wir können auch nach den logischen Beziehungen *zwischen* zwei Sätzen fragen. Zum Beispiel:

> Jonas ging einkaufen, nachdem er das Geschirr abwusch.
> Jonas wusch das Geschirr ab, bevor er einkaufen ging.

Diese beiden Sätze sind kontingent, da es möglich ist, dass Jonas gar nicht einkaufen ging oder überhaupt kein Geschirr abgewaschen hat. Dennoch müssen sie den gleichen Wahrheitswert haben. Wenn einer der beiden Sätze wahr ist, dann sind es beide; wenn einer der beiden Sätze falsch ist, dann sind es beide. Wenn zwei Sätze in jedem Fall den gleichen Wahrheitswert haben (also entweder beide wahr oder beide falsch sind), dann sagen wir, dass diese zwei Sätze NOTWENDIGERWEISE ÄQUIVALENT sind.

Zusammenfassung unserer logischen Begriffe

- Ein Argument ist GÜLTIG, wenn es keinen Fall gibt, in dem die Prämissen wahr sind und die Schlussfolgerung nicht; ansonsten ist es UNGÜLTIG.

- Eine NOTWENDIGE WAHRHEIT ist ein Satz, der in jedem Fall wahr ist.

- Eine NOTWENDIGE FALSCHHEIT ist ein Satz, der in jedem Fall falsch ist.

- Ein KONTINGENTER SATZ ist weder eine notwendige Wahrheit, noch eine notwendige Falschheit; er ist ein Satz, der in manchen Fällen wahr und in anderen falsch ist.

- Zwei Sätze sind NOTWENDIGERWEISE ÄQUIVALENT dann und nur dann, wenn sie in jedem Fall entweder beide wahr oder beide falsch sind.

- Eine Ansammlung an Sätzen ist GEMEINSAM MÖGLICH wenn es zumindest einen Fall gibt, in dem all diese Sätze gemeinsam wahr sind; ansonsten ist sie GEMEINSAM UNMÖGLICH.

Übungen

A. Für jeden der folgenden Sätze: ist er eine notwendige Wahrheit, eine notwendige Falschheit oder kontingent?

1. Cäsar überquerte den Rubikon.
2. Jemand hat den Rubikon überquert.
3. Niemand hat jemals den Rubikon überquert.
4. Wenn Cäsar den Rubikon überquert hat, dann hat jemand das getan.
5. Obwohl Cäsar den Rubikon überquert hat, hat niemand jemals den Rubikon überquert.
6. Wenn jemand den Rubikon überquert hat, dann war es Cäsar.

B. Für jeden der folgenden Sätze: ist er eine notwendige Wahrheit, eine notwendige Falschheit oder kontingent?

1. Elefanten lösen sich im Wasser auf.
2. Holz ist eine leichte, langlebige Substanz, nützlich fürs Bauen.
3. Wenn Holz ein gutes Baumaterial wäre, dann wäre es nützlich fürs Bauen.
4. Ich lebe in einem dreistöckigen Gebäude, das zwei Stockwerke hat.
5. Wenn Rennmäuse Säugetiere wären, dann würden sie ihre Jungen stillen.

C. Welche der folgenden Satzpaare sind notwendigerweise äquivalent?

1. Elefanten lösen sich im Wasser auf.
   Wenn Sie einen Elefanten ins Wasser tun, dann löst er sich auf.
2. Alle Säugetiere lösen sich im Wasser auf.
   Wenn Sie einen Elefanten ins Wasser tun, dann löst er sich auf.
3. George Bush war der 43ste US Präsident.
   Barack Obama war der 44ste US Präsident.
4. Barack Obama war der 44ste US Präsident.
   Barack Obama war Präsident direkt nach dem 43sten US Präsident.
5. Elefanten lösen sich im Wasser auf.
   Alle Säugetiere lösen sich im Wasser auf.

D. Welche der folgenden Satzpaare sind notwendigerweise äquivalent?

1. Thelonious Monk spielte Klavier.
   John Coltrane spielte Tenorsaxophon.
2. Thelonious Monk spielte Gigs mit John Coltrane.
   John Coltrane spielte Gigs mit Thelonious Monk.
3. Alle professionellen Klavierspieler*innen haben große Hände.
   Klavierspieler Bud Powell hatte große Hände.
4. Bud Powell litt an einer schweren psychischen Krankheit.
   Alle Klavierspieler*innen leiden an einer schweren psychischen Krankheit.
5. John Coltrane war zutiefst religiös.
   John Coltrane betrachtete Musik als eine Manifestation seiner Spiritualität.

E. Betrachten Sie die folgenden Sätze:

G1 Im Wildtierpark gibt es mindestens vier Giraffen.

G2 Es gibt genau sieben Gorillas im Wildtierpark.

G3 Es gibt nicht mehr als zwei Marsmenschen im Wildtierpark.

G4 Jede Giraffe im Wildtierpark ist ein Marsmensch.

Betrachten Sie nun die folgenden Satzkombinationen. Welche sind gemeinsam möglich? Welche sind gemeinsam unmöglich?

1. Sätze G2, G3 und G4
2. Sätze G1, G3 und G4
3. Sätze G1, G2 und G4
4. Sätze G1, G2 und G3

F. Betrachten Sie die folgenden Sätze:

M1 Alle Menschen sind sterblich.

M2 Sokrates ist ein Mensch.

M3 Sokrates wird niemals sterben.

M4 Sokrates ist sterblich.

Welche Satzkombinationen sind gemeinsam möglich? Benennen Sie jede Kombination als ‘möglich’ oder ‘unmöglich’.

1. M1, M2 und M3
2. M2, M3 und M4
3. M2 und M3
4. M1 und M4
5. M1, M2, M3 und M4

G. Welche der folgenden Sachverhalte sind möglich? Wenn er möglich ist, geben Sie ein Beispiel. Wenn nicht, begründen Sie wieso.

1. Ein gültiges Argument, dessen Schlussfolgerung eine notwendige Falschheit ist
2. Ein ungültiges Argument, dessen Schlussfolgerung eine notwendige Wahrheit ist
3. Eine notwendige Wahrheit, die kontingent ist
4. Zwei notwendigerweise äquivalente Sätze, die beide notwendige Wahrheiten sind

5. Zwei notwendigerweise äquivalente Sätze, von denen einer eine notwendige Wahrheit ist und der andere kontingent
6. Zwei notwendigerweise äquivalente Sätze, die gemeinsam unmöglich sind
7. Eine gemeinsam mögliche Satzkombination, die eine notwendige Falschheit enthält
8. Eine gemeinsam unmögliche Satzkombination, die eine notwendige Wahrheit enthält

H. Welche der folgenden Sachverhalte sind möglich? Wenn er möglich ist, geben Sie ein Beispiel. Wenn nicht, begründen Sie wieso.

1. Ein gültiges Argument, dessen Prämissen alle notwendige Wahrheiten sind, dessen Schlussfolgerung aber kontingent ist
2. Ein gültiges Argument mit wahren Prämissen und einer falschen Schlussfolgerung
3. Eine gemeinsam mögliche Satzkombination, die zwei Sätze enthält die notwendigerweise äquivalent sind
4. Eine gemeinsam mögliche Satzkombination, wo alle Sätze kontingent sind
5. Eine falsche notwendige Wahrheit
6. Ein gültiges Argument mit falschen Prämissen
7. Ein notwendigerweise äquivalentes Satzpaar, das nicht gemeinsam möglich ist
8. Eine notwendige Wahrheit, die auch eine notwendige Falschheit ist
9. Eine gemeinsam mögliche Satzkombination, wo alle Sätze notwendige Falschheiten sind

TEIL II

Wahrheitsfunktionale Logik

KAPITEL 4
Einstieg ins Symbolisieren

4.1 Gültigkeit aufgrund von Form

Betrachten wir das folgende Argument:

Es regnet draußen.
Wenn es draußen regnet, dann ist Jenny unglücklich.
∴ Jenny ist unglücklich.

und ein weiteres:

Jenny ist eine Anarcho-Syndikalistin.
Wenn Jenny eine Anarcho-Syndikalistin ist, dann ist Dipan ein eifriger Leser Tolstois.
∴ Dipan ist ein eifriger Leser Tolstois.

Beide Argumente sind gültig und wir können leicht erkennen, dass sie eine ähnliche Struktur aufweisen. Diese Struktur können wir so ausdrücken:

A
Wenn A, dann C
∴ C

Diese Form sieht wie eine exzellente Argument*struktur* aus. Gewiss ist jedes Argument mit dieser *Struktur* gültig. Diese ist nicht die einzige gute Argumentstruktur. Betrachten wir ein Argument wie dieses:

Jenny ist entweder glücklich oder traurig.
Jenny ist nicht glücklich.
∴ Jenny ist traurig.

Auch hier gilt: dies ist ein gültiges Argument. Die Argumentstruktur sieht hier wie folgt aus:

A oder B
nicht-A
∴ B

Eine hervorragende Struktur! Hier ist noch ein Beispiel:

Es ist nicht der Fall, dass Umut sowohl viel gelernt hat, als auch in vielen Theaterstücken mitgespielt hat.
Umut hat viel gelernt.
∴ Umut hat nicht in vielen Theaterstücken mitgespielt.

Dieses gültige Argument hat eine Struktur, die wir wie folgt repräsentieren können:

nicht-(A und B)
A
∴ nicht-B

Diese Beispiele veranschaulichen einen wichtigen Begriff, den der *Gültigkeit aufgrund von Form*. Die Gültigkeit der soeben betrachteten Argumente hat nicht viel mit den Bedeutungen deutscher Ausdrücke wie 'Jenny ist unglücklich', 'Dipan ist ein eifriger Leser Tolstois' oder 'Umut spielte in vielen Theaterstücken mit' zu tun. Wenn sie überhaupt mit Bedeutungen zu tun hat, dann mit den Bedeutungen von Ausdrücken wie 'und', 'oder', 'nicht,' und 'wenn. . . , dann. . . '.

In den folgenden Abschnitten werden wir eine formale Sprache entwickeln, die es uns erlaubt, viele Argumente so zu symbolisieren, dass sie aufgrund ihrer Form gültig sind. Diese Sprache nennen wir *wahrheitsfunktionale Logik* oder WFL.

4.2 Gültigkeit aus besonderen Gründen

Es gibt viele Argumente, die gültig sind, aber nicht aufgrund ihrer Form. Nehmen wir ein Beispiel:

Juan ist ein Kater.
∴ Juan ist eine Katze.

Es ist unmöglich, dass die Prämisse wahr und die Schlussfolgerung falsch ist. Das Argument ist also gültig. Seine Gültigkeit verdankt dieses Argument allerdings nicht seiner Form. Hier ist ein ungültiges Argument mit der gleichen Form:

Juan ist ein Kater
∴ Juan ist eine Kathedrale

Dies deutet daraufhin, dass die Gültigkeit des ersten Arguments auf die Bedeutung der Wörter 'Kater' und 'Katze' zurückzuführen ist. Aber unabhängig davon ist es nicht einfach die Form des Arguments, die es gültig macht. Gleichfalls, betrachten Sie das folgende Argument:

Die Statue ist überall grün.
∴ Die Statue ist nicht überall rot.

Auch hier scheint es unmöglich zu sein, dass die Prämisse wahr und die Schlussfolgerung falsch ist. Denn nichts kann sowohl überall grün als auch überall rot sein. Das Argument ist also gültig. Aber hier ist ein ungültiges Argument mit der gleichen Form:

Die Statue ist überall grün.
∴ Die Statue ist nicht überall glänzend.

Das Argument ist ungültig, da es möglich ist, überall grün zu sein und überall zu glänzen. (Ich könnte beispielsweise meine Nägel mit einem eleganten, glänzenden, grünen Lack lackieren.) Plausiblerweise hängt die Gültigkeit des ersten Arguments von der Art und Weise ab, wie Farben (oder Farbworte) miteinander interagieren. Aber unabhängig davon ist es nicht einfach nur die Form des Arguments, die es gültig macht.

Der wesentliche Schluss daraus ist der folgende. *Im besten Fall wird uns die wahrheitsfunktionale Logik helfen, die Gültigkeit von Argumenten zu verstehen, die aufgrund ihrer Form gültig sind.*

4.3 Einfache Sätze

Wir begannen, die Form eines Arguments in §4.1 zu isolieren, indem wir *Teilsätze* von Sätzen durch einzelne Buchstaben ersetzten. So ist im ersten Beispiel dieses Abschnitts ‘Es regnet draußen’ ein Teilsatz von ‘Wenn es draußen regnet, dann ist Jenny unglücklich’, und wir ersetzten diesen Teilsatz durch ‘A’.

Unsere künstliche Sprache, die WFL, verfolgt diese Idee auf rigorose Art und Weise. Wir beginnen mit ein paar *Satzbuchstaben*. Diese werden die Grundbausteine oder Basiselemente unserer Sprache sein, aus denen komplexere Sätze dieser Sprache gebaut werden. Wir werden einzelne Großbuchstaben als Satzbuchstaben der WFL verwenden. Es gibt nur 26 Buchstaben des Alphabets, aber es gibt keine Grenze für die Anzahl der Satzbuchstaben, die wir in Betracht ziehen können. Durch Hinzufügen von Subskripten zu Buchstaben erhalten wir neue Satzbuchstaben. Hier sind also fünf verschiedene Satzbuchstaben der WFL:

$$A, P, P_1, P_2, A_{234}$$

Wir werden Satzbuchstaben verwenden, um bestimmte deutsche Sätze zu repräsentieren oder zu symbolisieren. Dazu stellen wir einen SYMBOLISIERUNGSSCHLÜSSEL zur Verfügung, wie zum Beispiel den folgenden:

A: Es regnet draußen.
C: Jenny ist unglücklich.

Damit fixieren wir diese Symbolisierung nicht *ein für alle mal*. Wir sagen nur, dass wir uns vorerst den Satzbuchstaben der WFL, ‘A’, als Symbol für den deutschen Satz ‘Es regnet draußen’, und den Satzbuchstaben der WFL, 'C', als Symbol für den deutschen Satz 'Jenny ist unglücklich', vorstellen. Später, wenn wir es mit verschiedenen Sätzen oder verschiedenen Argumenten zu tun haben, können wir einen neuen Symbolisierungsschlüssel zur Verfügung stellen; zum Beispiel:

A: Jenny ist eine Anarcho-Syndikalistin.
C: Dipan ist ein eifriger Leser Tolstois.

Es ist wichtig, dass jede Struktur, die ein deutscher Satz hat, verloren geht, wenn er durch einen Satzbuchstaben von WFL symbolisiert wird. Aus der Sicht von WFL ist ein Satzbuchstabe nur ein Buchstabe. Er kann verwendet werden, um komplexere Sätze zu bilden, aber er kann nicht weiter unterteilt werden.

KAPITEL 5

Junktoren

Im vorigen Kapitel haben wir uns damit beschäftigt, ziemlich einfache deutsche Sätze mit Satzbuchstaben der WFL zu symbolisieren. Das führt dazu, dass wir uns mit den deutschen Ausdrücken ‘und’, ‘oder’, ‘nicht’ und so weiter beschäftigen wollen. Dies sind *Junktoren*, auch Konnektive genannt—sie können verwendet werden, um aus alten Sätzen neue zu bilden. In der WFL werden wir Junktoren verwenden, um komplexe Sätze aus einfachen Sätzen zu bilden. Die WFL hat fünf Junktoren. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über sie; dieses Kapitel erläutert sie.

symbol	**Name**	**ungefähre Bedeutung**
$\neg$	Negation	‘Es ist nicht der Fall, dass …’
$\wedge$	Konjunktion	‘… und …’
$\vee$	Disjunktion	‘(Entweder) … oder …’
$\rightarrow$	Konditional	‘Wenn … dann …’
$\leftrightarrow$	Bikonditional	‘… wenn und nur wenn …’

Dies sind nicht die einzigen Junktoren des Deutschen. Andere sind z.B. ‘es sei denn’, ‘weder … noch …, und ‘weil’. Wir werden sehen, dass die ersten beiden durch die Junktoren, die wir diskutieren werden, ausgedrückt werden können. Dies ist nicht der Fall für den Letzteren. ‘Weil’ ist, im Gegensatz zu den anderen, nicht *wahrheitsfunktional.*

5.1 Negation

Wie können wir die folgenden Sätze symbolisieren?

1. Mary ist in Barcelona.
2. Es ist nicht der Fall, dass Mary in Barcelona ist.
3. Mary ist nicht in Barcelona.

Um Satz 1 zu symbolisieren, brauchen wir einen Satzbuchstaben. Hier ist unser Symbolisierungsschlüssel:

B: Mary ist in Barcelona.

Da Satz 2 offensichtlich mit Satz 1 verwandt ist, werden wir ihn nicht mit einem völlig anderen Satzbuchstaben symbolisieren. Grob gesagt bedeutet Satz 2 so etwas wie 'Es ist nicht der Fall, dass B'. Um dies zu symbolisieren, brauchen wir ein Symbol, um die Negation 'Es ist nicht der Fall, dass' zu repräsentieren. Hierzu verwenden wir '$\neg$'. Somit können wir Satz 2 mit '$\neg B$' symbolisieren.

Satz 3 enthält auch das Wort 'nicht', und er ist offensichtlich notwendigerweise äquivalent zu Satz 2. Als solchen können wir auch ihn mit '$\neg B$' symbolisieren.

> Ein Satz kann als $\neg\mathscr{A}$ symbolisiert werden, wenn er im Deutschen als 'Es ist nicht der Fall, dass...' paraphrasiert werden kann.

Es wird helfen, einige weitere Beispiele durchzugehen:

1. Das Gerät kann ersetzt werden.
2. Das Gerät ist unersetzlich.
3. Das Gerät ist nicht unersetzlich.

Hier nutzen wir den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

R: Das Gerät kann ersetzt werden.

Satz 1 können wir nun als 'R' symbolisieren. Weiter zu Satz 2: zu sagen, dass das Gerät unersetzlich ist, bedeutet, dass es nicht der Fall ist, dass das Gerät ersetzt werden kann. Auch wenn Satz 2 das Wort 'nicht' nicht enthält, werden wir ihn daher als '$\neg R$' symbolisieren.

Satz 3 kann paraphrasiert werden als 'Es ist nicht der Fall, dass das Gerät unersetzlich ist'. Dies kann wiederum umschrieben werden als 'Es ist nicht der Fall, dass das Gerät nicht ersetzt werden kann'. Wir können also diesen deutschen Satz mit dem WFL-Satz '$\neg\neg R$' symbolisieren.

Die Negation ist oft recht einfach anzuwenden. Aber in manchen Fällen ist Vorsicht geboten. Betrachten wir etwa:

4. Umut ist glücklich.
5. Umut ist unglücklich.

Wenn wir den WFL-Satz 'G' den Satz 'Umut ist glücklich' symbolisieren lassen, dann können wir den Satz 4 als 'G' symbolisieren. Es wäre jedoch ein Fehler, den Satz 5 mit '$\neg G$' zu symbolisieren. Wenn Umut unglücklich ist, dann ist er nicht glücklich; aber Satz 5 bedeutet nicht dasselbe wie 'Es ist nicht der Fall, dass Umut glücklich ist'. Laut dem Letzteren könnte Umut weder glücklich noch unglücklich sein; er könnte sich in einem Zustand schierer Gleichgültigkeit befinden. Um den Satz 5 zu symbolisieren, brauchen wir also einen neuen Satzbuchstaben der WFL.

5.2 Konjunktion

Betrachten wir ein paar weitere Sätze:

6. Adam ist sportlich.
7. Barbara ist sportlich.
8. Adam ist sportlich und Barbara ist auch sportlich.

Zunächst brauchen wir unterschiedliche Satzbuchstaben der WFL um Sätze 6 and 7 zu symbolisieren; beispielsweise:

A: Adam ist sportlich.
B: Barbara ist sportlich.

Satz 6 kann nun als 'A' symbolisiert werden und Satz 7 als 'B'. Satz 8 besagt ungefähr: 'A und B'. Wir brauchen also ein weiteres Symbol um 'und' zu symbolisieren. Hierzu nutzen wir '$\wedge$'. Also werden wir 8 als '$(A \wedge B)$' symbolisieren. Diesen Junktor nennen wir KONJUNKTION. Wir sagen auch, dass 'A' und 'B' die zwei KONJUNKTE der Konjunktion '$(A \wedge B)$' sind.

Beachten Sie, dass wir keinen Versuch unternommen haben, das Wort 'auch' im Satz 8 zu symbolisieren. Wörter wie 'auch' und 'beide' dienen dazu, unsere Aufmerksamkeit auf die Tatsache zu lenken, dass zwei Dinge miteinander konjunktiert werden. Es könnte sein, dass sie die Betonung eines Satzes beeinflussen, aber wir werden (und können) solche Dinge in der WFL nicht symbolisieren.

Einige weitere Beispiele helfen, diese Tatsache zu veranschaulichen:

9. Barbara ist sportlich und energisch.
10. Barbara und Adam sind beide sportlich.
11. Obwohl Barbara energisch ist, ist sie nicht sportlich.
12. Adam ist sportlich, aber Barbara is sportlicher als er.

Der Satz 9 ist offensichtlich eine Konjunktion. Der Satz sagt zwei Dinge (über Barbara) aus. Im Deutschen ist es zulässig, sich nur einmal auf Barbara zu beziehen. Man könnte daher annehmen, dass wir den Satz 9 mit so etwas wie 'B und energisch' symbolisieren müssen. Das wäre allerdings ein Fehler. Sobald wir einen Teil eines Satzes als 'B' symbolisieren, geht jede weitere Struktur verloren, da 'B' ein Satzbuchstabe der WFL ist. Umgekehrt ist 'energisch' überhaupt kein deutscher Satz. Was wir anstreben, ist so etwas wie 'B und Barbara ist energisch'. Wir müssen also dem Symbolisierungsschlüssel einen weiteren Satzbuchstaben hinzufügen. Lassen wir 'E' 'Barbara ist energisch' symbolisieren. Nun kann der gesamte Satz als '$(B \wedge E)$' symbolisiert werden.

Satz 10 sagt eine Sache über zwei verschiedene Subjekte aus. Er sagt sowohl von Barbara als auch von Adam, dass sie sportlich sind, auch wenn wir im Deutschen das Wort 'sportlich' nur einmal verwenden. Der Satz kann umschrieben werden als 'Barbara ist sportlich und Adam ist sportlich'. Wir können dies in der WFL als '$(B \wedge A)$' symbolisieren, indem wir den gleichen Symbolisierungsschlüssel verwenden, den wir bisher schon verwendet haben.

Satz 11 ist etwas komplizierter. Das Wort 'obwohl' stellt einen Kontrast zwischen dem ersten Teil des Satzes und dem zweiten her. Dennoch sagt uns der Satz sowohl, dass Barbara energisch ist, als auch, dass sie nicht sportlich ist. Um aus jedem der Konjunkten einen Satzbuchstaben zu machen, müssen wir 'sie' durch 'Barbara' ersetzen. So können wir Satz 11 umschreiben als 'Barbara ist energisch und Barbara ist nicht sportlich'. Das zweite Konjunkt enthält eine Verneinung, sodass wir weiter paraphrasieren können: 'Barbara ist energisch und *es ist nicht der Fall, dass* Barbara sportlich ist'. Nun können wir dies mit dem WFL-Satz '$(E \wedge \neg B)$' symbolisieren. Beachten Sie, dass wir bei dieser Symbolisierung einige Nuancen verloren haben. Es gibt einen deutlichen Unterschied im Tonfall zwischen Satz 11 und 'Barbara ist energisch und es ist nicht der Fall, dass Barbara sportlich ist'. WFL bewahrt diese Nuancen nicht (und kann das auch nicht tun).

Satz 12 wirft ähnliche Fragen auf. Er hat eine kontrastierende Struktur, aber mit dieser kann die WFL nicht umgehen. Wir können den Satz also mit 'Adam ist sportlich und Barbara ist sportlicher als Adam' umschreiben. (Beachten Sie, dass wir hier das Pronomen 'er' durch 'Adam' ersetzen.) Wie sollen wir nun mit dem zweiten Konjunkt umgehen? Wir haben bereits den Satzbuchstaben 'A', der verwendet wird, um 'Adam ist sportlich' zu symbolisieren, und den Satz 'B', der verwendet wird, um 'Barbara ist sportlich' zu symbolisieren; aber keiner der beiden vergleicht Adams mit Barbaras Sportlichkeit. Um also den gesamten Satz zu symbolisieren, brauchen wir einen neuen Satzbuchstaben. Lassen Sie den WFL-Satz 'R' den deutschen Satz 'Barbara ist sportlicher als Adam' symbolisieren. Jetzt können wir den Satz

12 mit ‘$(A \wedge R)$’ symbolisieren.

Ein Satz kann als $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ symbolisiert werden, wenn er im Deutschen als ‘... und ...’ oder als ‘..., aber ...’ oder als ‘Obwohl ..., ...’ paraphrasiert werden kann.

An dieser Stelle fragen Sie sich vielleicht, warum wir Klammern um die Konjunktionen setzen. Den Grund dafür sehen wir, wenn wir darüber nachdenken, wie die Negation mit der Konjunktion interagiert. Betrachten Sie:

13. Es ist nicht der Fall, dass du die Suppe und den Salat kriegen wirst.
14. Du wirst die Suppe nicht kriegen, aber dafür den Salat.

Satz 13 können wir als ‘Es ist nicht der Fall, dass: du wirst die Suppe kriegen und du wirst den Salat kriegen’ umschreiben. Mithilfe des folgenden Symbolisierungsschlüssels:

S_1: Du wirst die Suppe kriegen.
S_2: Du wirst den Salat kriegen.

würden wir ‘du wirst die Suppe kriegen und du wirst den Salat kriegen’ als ‘$(S_1 \wedge S_2)$’ symbolisieren. Um Satz 13 zu symbolisieren, negieren wir dann einfach den ganzen komplexen Satz: ‘$\neg(S_1 \wedge S_2)$’.

Satz 14 ist eine Konjunktion: du wirst die Suppe *nicht* kriegen und du *wirst* Salat kriegen. ‘Du wirst die Suppe nicht kriegen’ ist als ‘$\neg S_1$’ symbolisiert. Um den ganzen komplexen Satz 14 zu symbolisieren, nutzen wir also ‘$(\neg S_1 \wedge S_2)$’.

Die deutschen Sätze 13 und 14 sind sehr unterschiedlich. Dementsprechend unterscheiden sich auch ihre Symbolisierungen. In einem von ihnen wird die gesamte Konjunktion verneint. In dem anderen wird nur einer der zwei Konjunkte verneint. Klammern helfen uns, den Überblick zu behalten, z.B. über den *Geltungsbereich* der Negation.

5.3 Disjunktion

Wenden wir uns nun den folgenden Sätzen zu:

15. Fatima spielt Videospiele oder sie schaut Filme.
16. Entweder Fatima oder Omar spielt Videospiele.

Für diese Sätze können wir folgenden Symbolisierungsschlüssel nutzen:

F: Fatima spielt Videospiele.
O: Omar spielt Videospiele.
M: Fatima schaut Filme.

Um diese Sätze zu symbolisieren, müssen wir allerdings ein neues Symbol einführen. Satz 15 wird durch '$(F \vee M)$' symbolisiert. Der Junktor, den wir hier nutzen, nennen wir DISJUNKTION. Wir sagen auch, dass 'F' und 'M' die DISJUNKTE der Disjunktion '$(F \vee M)$' sind.

Satz 16 ist nur geringfügig komplizierter. Es gibt zwei Subjekte, aber das Verb kommt im deutschen Satz nur einmal vor. Wir können Satz 16 jedoch so umschreiben: 'Entweder Fatima spielt Videospiele oder Omar spielt Videospiele'. Jetzt können wir ihn natürlich durch '$(F \vee O)$' symbolisieren.

Ein Satz kann als $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ symbolisiert werden, wenn er im Deutschen als '(Entweder)… oder…' paraphrasiert werden kann.

Manchmal wird im Deutschen das Wort 'oder' auf eine Weise verwendet, die ausschließt, dass beide Disjunkte wahr sind. Dies wird als ein AUSSCHLIESSENDES ODER bezeichnet. Ein *ausschließendes oder* ist eindeutig gemeint, wenn auf der Speisekarte eines Restaurants steht: 'Burger kommt mit Salat oder Pommes': Sie können Salat haben; Sie können Pommes haben; aber wenn Sie *sowohl* Salat *als auch* Pommes möchten, dann müssen Sie einen Aufpreis bezahlen.

In andere Fällen lässt das Wort ‘oder’ die Möglichkeit offen, dass beide Disjunkte wahr sind. Dies ist wahrscheinlich der Fall bei Satz 16 oben. Fatima könnte alleine Videospiele spielen, Omar könnte alleine Videospiele spielen, oder sie könnten beide spielen. Satz 16 besagt lediglich, dass *mindestens* einer von ihnen Videospiele spielt. Dies ist ein EINSCHLIESSENDES ODER. Das WFL-Symbol ‘$\vee$’ symbolisiert immer ein *einschließendes oder*.

Es ist auch lehrreich, zu betrachten, wie die Disjunktion mit der Negation interagiert.

17. Entweder kriegst du keinen Salat oder du kriegst keine Suppe.
18. Du wirst weder Suppe noch Salat kriegen.
19. Du kriegst Suppe oder Salat, aber nicht beides.

Unter Verwendung desselben Symbolisierungsschlüssels wie zuvor kann der Satz 17 folgendermaßen umschrieben werden: ‘Entweder ist es nicht der Fall, dass du Suppe kriegst, oder es ist nicht der Fall, dass du Salat kriegst’. Um dies in der WFL zu symbolisieren, brauchen wir sowohl Disjunktion als auch Negation. ‘Es ist nicht der Fall, dass du Suppe kriegst’ wird durch ‘$\neg S_1$ symbolisiert. ‘Es ist nicht der Fall, dass du Salat kriegst’ wird durch ‘$\neg S_2$’ symbolisiert. Der Satz 17 selbst wird also durch ‘$(\neg S_1 \vee \neg S_2)$’ symbolisiert.

Satz 18 erfordert ebenfalls eine Negation. Er kann wie folgt umschrieben werden: ‘Es ist nicht der Fall, dass: entweder bekommst du Suppe oder du bekommst Salat’. Da hier die gesamte Disjunktion negiert wird, symbolisieren wir Satz 18 mit ‘$\neg(S_1 \vee S_2)$’.

Satz 19 ist ausdrücklich ein *ausschließendes oder*. Wir können den Satz in zwei Teile aufteilen. Der erste Teil besagt, dass du das eine oder das andere kriegst. Wir symbolisieren dies als ‘$(S_1 \vee S_2)$’. Der zweite Teil besagt, dass du nicht beides kriegst. Wir können das umschreiben als: ‘Es ist nicht der Fall, dass du sowohl Pommes als auch Salat kriegst’. Indem wir sowohl die Negation als auch die Konjunktion verwenden, symbolisieren wir dies mit

'$\neg(S_1 \wedge S_2)$'. Jetzt müssen wir nur noch die zwei Teile kombinieren. Wie wir oben gesehen haben, kann 'aber' normalerweise mit '$\wedge$' symbolisiert werden. Der Satz 19 kann also mit '$((S_1 \vee S_2) \wedge \neg(S_1 \wedge S_2))$' symbolisiert werden.

Dieses letzte Beispiel zeigt etwas Wichtiges. Obwohl das WFL-Symbol '$\vee$' immer ein *einschließendes oder* symbolisiert, können wir ein *ausschließendes oder* in der WFL symbolisieren. Wir müssen nur ein paar andere Symbole verwenden.

5.4 Konditional

Betrachten wir nun die folgenden Sätze:

20. Wenn Jean in Paris ist, dann ist sie in Frankreich.
21. Jean ist in Frankreich nur wenn Jean in Paris ist.

Wir nutzen den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

P: Jean ist in Paris.
F: Jean ist in Frankreich.

Satz 20 hat ungefähr diese Form: 'wenn P, dann F'. Wir werden das Symbol '$\rightarrow$' verwenden, um die Struktur 'wenn…, dann…' zu symbolisieren. Satz symbolisieren wir daher 20 als '$(P \rightarrow F)$'. Der Junktor hier wird KONDITIONAL genannt. Wir sagen, dass 'P' das ANTEZEDENS des Konditionals '$(P \rightarrow F)$' ist und 'F' das KONSEQUENS.

Satz 21 ist auch ein Konditional. Da das Wort 'wenn' in der zweiten Hälfte des Satzes vorkommt, könnte es verlockend sein, diesen Satz genau so wie Satz 20 zu symbolisieren. Das aber wäre ein Fehler. Ihr geographisches Wissen sagt Ihnen, dass Satz 20 wahr ist: Es gibt keine Möglichkeit in der Jean in Paris ist, in der sie nicht auch in Frankreich ist. Aber das gilt nicht für Satz 21: Wäre Jean in Dieppe, Lyon oder Toulouse, dann wäre sie in Frankreich, ohne jedoch in Paris zu sein. Und dann wäre Satz 21 falsch. Da allein die Geographie die Wahrheit des Satzes 20 diktiert, während Reisepläne (sagen wir) notwendig sind, um die

Wahrheit des Satzes 21 zu erkennen, müssen sie verschiedene Bedeutungen haben.

Tatsächlich kann der Satz 21 so paraphrasiert werden: ‘Wenn Jean in Frankreich ist, dann ist Jean in Paris’. Daher können wir ihn durch ‘$(F \to P)$’ symbolisieren.

> Ein Satz kann als $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ symbolisiert werden, wenn er als ‘Wenn A, dann B’ oder ‘A nur wenn B’ paraphrasiert werden kann.

Zudem ist das Konditional nützlich, um auch noch einige weitere deutsche Ausdrücke zu symbolisieren:

22. Damit Jean in Paris ist, ist es notwendig, dass Jean in Frankreich ist.
23. Es ist eine notwendige Bedingung dafür, dass Jean in Paris ist, dass sie in Frankreich ist.
24. Damit Jean in Frankreich ist, reicht es, dass Jean in Paris ist.
25. Es ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass Jean in Frankreich ist, dass sie in Paris ist.

Wenn wir darüber nachdenken, bedeuten diese vier Sätze alle dasselbe: ‘Wenn Jean in Paris ist, dann ist Jean in Frankreich’. Sie können also alle durch ‘$(P \to F)$’ symbolisiert werden.

Es ist wichtig, dass der Junktor ‘$\to$’ uns nur sagt, dass, wenn das Antezedens wahr ist, auch das Konsequens wahr ist. Er sagt nichts über eine kausale Verbindung zwischen zwei Ereignissen (zum Beispiel) aus. Tatsächlich gehen sehr viele Nuancen verloren, wenn wir ‘$\to$’ verwenden, um verschiedene deutsche Konditionale zu symbolisieren. Auf dieses Thema werden wir in §§10.3 und 12.5 zurückkommen.

5.5 Bikonditional

Wenden wir uns nun den folgenden Sätzen zu:

26. Laika ist ein Hund nur wenn sie ein Säugetier ist.
27. Laika ist ein Hund, wenn sie ein Säugetier ist.
28. Laika ist ein Hund wenn und nur wenn sie ein Säugetier ist.

Wir nutzen den folgenden Symbolisierungschlüssel:

D: Laika ist ein Hund.
M: Laika ist ein Säugetier.

Wie wir oben gesehen haben, kann Satz 26 als '$(D \to M)$' symbolisiert werden.

Satz 27 kann nicht auf diese Art symbolisiert werden. Dieser Satz kann als 'Wenn Laika ein Säugetier ist, dann ist sie ein Hund' umgeschrieben werden. Also können wir ihn als '$M \to D$' symbolisieren.

Der Satz 28 sagt etwas Stärkeres aus als 26 und 27. Er kann wie folgt paraphrasiert werden: 'Laika ist ein Hund, wenn Laika ein Säugetier ist, und Laika ist ein Hund nur wenn Laika ein Säugetier ist'. Dies ist einfach die Konjunktion der Sätze 26 und 27. Wir können es also als '$(D \to M) \land (M \to D)$' symbolisieren. Wir nennen dies einen BIKONDITIONAL, weil wir in Sätzen wie diesem *beide Richtungen* des Konditionals finden.

Auf diese Weise könnten wir jeden Bikonditional behandeln. So wie wir also kein neues WFL-Symbol brauchen, um mit dem *ausschließenden oder* umzugehen, so brauchen wir eigentlich auch kein neues WFL-Symbol, um mit dem Bikonditional umzugehen. Da das Bikonditional jedoch so häufig vorkommt, werden wir für es dennoch das Symbol '$\leftrightarrow$' verwenden. Wir können dann den Satz 28 mit dem WFL-Satz '$(D \leftrightarrow M)$' symbolisieren.

Der Ausdruck 'wenn und nur wenn' kommt vor allem in der Philosophie, Mathematik und Logik sehr häufig vor (dort meistens im Englischen 'if and only if'). Er wird auch häufig mit 'genau dann, wenn' (im Englischen: 'just in case') oder als 'dann und nur dann, wenn'. Der Kürze halber werden wir ihn manchmal auch mit dem schnittigen 'gdw' abkürzen.

Ein Satz kann als $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ symbolisiert werden, wennn er als '…wenn und nur wenn…', '…dann und nur dann, wenn…' oder '…genau dann, wenn…' paraphrasiert werden kann.

Beim Umgang mit Konditionalen und Bikonditionalen, wie wir sie im Deutschen ausdrücken, ist Vorsicht geboten. Gewöhnliche Menschen, die Deutsch sprechen, benutzen oft 'wenn…, dann…', wenn sie wirklich etwas wie '…dann und nur dann, wenn…' benutzen wollen. Vielleicht haben Ihnen Ihre Eltern das als Kind gesagt: 'Wenn du dein Gemüse nicht isst, bekommst du keinen Nachtisch'. Aber nehmen Sie nun an, dass Ihr Gemüse essen, aber Ihre Eltern sich dennoch weigern, Ihnen einen Nachtisch zu geben; mit der Begründung, dass sie ja nur das Konditional genutzt hatten (in etwa: 'Wenn du deinen Nachtisch bekommst, dann hast du dein Gemüse gegessen') und nicht das Bikonditional (in etwa: 'Du bekommst deinen Nachtisch genau dann, wenn du dein Gemüse isst'). Nun könnten Sie zu Recht auf Ihre Eltern sauer sein. Denn was Ihre Eltern sagten, wird unter normalen Umständen als ein Bikonditional verstanden und nicht als ein Konditional. Seien Sie sich dessen bewusst, wenn Sie Menschen interpretieren; aber achten Sie darauf, dass Sie in Ihren eigenen Texten das Bikonditional verwenden, wenn Sie es beabsichtigen.

5.6 Es sei denn…

Wir haben nun alle Junktoren der WFL vorgestellt. Wir können sie zusammen verwenden, um viele Arten von Sätzen zu symbolisieren. Ein besonders schwieriger Fall ist das deutsche Konnektiv '…es sei denn…'. (Ähnlich verhält sich auch '…außer…'.) Diesem wenden wir uns nun kurz zu.

29. Du wirst dich erkälten, es sei denn, du trägst eine Jacke.

Um diesen Satz zu symbolisieren, nutzen wir den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

J: Du trägst eine Jacke.
D: Du wirst dich erkälten.

Dieser Satz besagt, dass du dich erkälten wirst, wenn du keine Jacke trägst. In diesem Sinne können wir den Satz als '$(\neg J \rightarrow D)$' symbolisieren.

Gleichfalls besagt dieser Satz auch, dass du, wenn du dich nicht erkältest, eine Jacke getragen hast. In diesem Sinne können wir den Satz auch als '$(\neg D \rightarrow J)$' symbolisieren.

Wiederum gleichfalls besagt dieser Satz aber auch, dass du entweder eine Jacke trägst oder dich erkältest. In diesem Sinne können wir den Satz als '$(J \vee D)$' symbolisieren.

Alle drei Optionen sind korrekte Symbolisierungen. In Kapitel 12 werden wir zudem sehen, dass diese drei Optionen in der WFL notwendigerweise äquivalent sind.

> Ein Satz kann als $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ symbolisiert werden, wenn er als 'B, es sei denn, A' paraphrasiert werden kann.

Aber auch hier gibt es eine kleine Schwierigkeit. 'Es sei denn' kann als ein Konditional symbolisiert werden; doch wie wir schon gesagt haben, verwenden Menschen oft das Konditional (allein), wenn sie den Bikonditional verwenden wollen. Gleichermaßen kann 'es sei denn' als eine Disjunktion symbolisiert werden; aber es gibt zwei Arten von Disjunktion (aus- und einschließend). Es wird Sie also nicht überraschen, wenn Sie feststellen, dass gewöhnliche Sprecher des Deutschen 'es sei denn' oft verwenden, um etwas zu sagen, dass eher so etwas wie der Bikonditional oder die exklusive Disjunktion bedeutet. Nehmen Sie z.B. an, jemand sagt: 'Ich werde laufen gehen, es sei denn es regnet'. Diese Person meint wahrscheinlich so etwas wie: 'Ich werde dann und nur dann laufen gehen, wenn es nicht regnet' (d.h. das Bikonditional) oder ‘Entweder werde ich laufen gehen oder es wird regnen, aber nicht beides’ (d.h. die ausschließende Disjunktion).

Übungen

A. Symbolisieren Sie die folgenden deutschen Sätze in der WFL mithilfe des angegebenen Symbolisierungsschlüssels.

M: Diese Wesen sind Männer in Anzügen.
C: Diese Wesen sind Schimpansen.
G: Diese Wesen sind Gorillas.

1. Diese Wesen sind keine Männer in Anzügen.
2. Diese Wesen sind Männer in Anzügen oder auch nicht.
3. Diese Wesen sind entweder Gorillas oder Schimpansen.
4. Diese Wesen sind weder Gorillas noch Schimpansen.
5. Wenn diese Wesen Schimpansen sind, dann sind sie weder Gorillas noch Männer in Anzügen.
6. Diese Wesen sind Männer in Anzügen, es sei denn, sie sind entweder Schimpansen oder Gorillas.

B. Symbolisieren Sie die folgenden deutschen Sätze in der WFL mithilfe des angegebenen Symbolisierungsschlüssels.

A: Mister Ace wurde ermordet.
B: Der Butler hat es getan.
C: Der Koch hat es getan.
D: Die Gräfin lügt.
E: Mister Edge wurde ermordet.
F: Die Mordwaffe war eine Bratpfanne.

1. Entweder wurde Mister Ace oder Mister Edge ermordet.
2. Wenn Mister Ace ermordet wurde, dann hat der Koch es getan.
3. Wenn Mister Edge ermordet wurde, dann hat der Koch es nicht getan.
4. Entweder hat es der Butler getan oder die Gräfin lügt.

5. Der Koch hat es getan, nur, wenn die Gräfin lügt.
6. Wenn die Mordwaffe eine Bratpfanne war, dann hat der Koch es getan.
7. Wenn die Mordwaffe keine Bratpfanne war, dann war der Täter entweder der Koch oder der Butler.
8. Mister Ace wurde ermordert genau dann, wenn Mister Edge nicht ermordet wurde.
9. Die Gräfin lügt, es sei denn, es war Mister Edge, der ermordet wurde.
10. Wenn Mister Ace umgebracht wurde, wurde er mit einer Bratpfanne ermordet.
11. Weil der Koch es getan hat, hat der Butler es nicht getan.
12. Natürlich lügt die Gräfin!

C. Symbolisieren Sie die folgenden deutschen Sätze in der WFL mithilfe des angegebenen Symbolisierungsschlüssels.

E_1: Ava ist eine Elektrikerin.
E_2: Harrison ist ein Elektriker.
F_1: Ava ist eine Feuerwehrfrau.
F_2: Harrison ist ein Feuerwehrmann.
S_1: Ava ist zufrieden mit ihrer Karriere.
S_2: Harrison ist zufrieden mit seiner Karriere.

1. Ava und Harrison sind beide Elektriker*innen.
2. Wenn Ava eine Feuerwehrfrau ist, dann ist sie mit ihrer Karriere zufrieden.
3. Ava ist eine Feuerwehrfrau, es sei denn sie ist eine Elektrikerin.
4. Harrison ist ein unzufriedener Elektriker.
5. Weder Ava noch Harrison sind Elektriker*innen.
6. Ava und Harrison sind beide Elektriker*innen, aber keine*r der beiden ist zufrieden mit der eigenen Karriere.
7. Harrison ist zufrieden nur wenn er Elektriker ist.
8. Wenn Ava keine Elektrikerin ist, dann ist auch Harrison keiner, aber wenn sie eine ist, dann ist er auch einer.

9. Ava ist zufrieden mit ihrer Karriere dann und nur dann, wenn Harrison mit seiner nicht zufrieden ist.
10. Wenn Harrison Elektriker und Feuerwehrmann ist, dann ist er mit seiner Karriere zufrieden.
11. Es kann nicht sein, dass Harrison Elektriker und Feuerwehrmann ist.
12. Harrison und Ava sind beide bei der Feuerwehr genau dann, wenn weder Harrison noch Ava Elektriker*innen sind.

D. Symbolisieren Sie die folgenden deutschen Sätze in der WFL mithilfe des angegebenen Symbolisierungsschlüssels.

J_1: John Coltrane spielte Tenorsaxophon.
J_2: John Coltrane spielte Sopransaxophon.
J_3: John Coltrane spielte Tuba.
M_1: Miles Davis spielte Trompete.
M_2: Miles Davis spielte Tuba.

1. John Coltrane spielte Tenor- und Sopransaxophon.
2. Weder Miles Davis noch John Coltrane spielten Tuba.
3. John Coltrane spielte nicht sowohl Tenorsaxophon als auch Tuba.
4. John Coltrane spielte nicht Tenorsaxophon, es sei denn, er spielte auch Sopransaxophon
5. John Coltrane spielte nicht Tuba, aber Miles Davis schon.
6. Miles Davis spielte Trompete nur, wenn er auch Tuba spielte.
7. Wenn Miles Davis Trompete spielte, dann spielte John Coltrane zumindest dieser drei Instrumente: Tenorsaxophon, Sopransaxophon oder Tuba.
8. Wenn John Coltrane Tuba spielte, dann spielte Miles Davis weder Trompete noch Tuba.
9. Miles Davis und John Coltrane spielten beide Tuba dann und nur dann, wenn Coltrane nicht Tenorsaxophon und Miles Davis nicht Trompete spielte.

E. Geben Sie einen Symbolisierungsschlüssel an und symbolisieren Sie die folgenden deutschen Sätze in der WFL.

1. Alice und Bob sind beide Spione.
2. Wenn entweder Alice oder Bob ein*e Spion*in ist, dann wurde der Code geknackt.
3. Wenn weder Alice noch Bob Spione sind, dann wurde der Code nicht geknackt.
4. Die Deutsche Botschaft wird in einem Aufruhr sein, es sei denn jemand hat den Code geknackt.
5. Entweder wurde der Code geknackt oder nicht; wie dem auch sei, die Deutsche Botschaft wird in einem Aufruhr sein.
6. Alice oder Bob ist ein*e Spion*in, aber nicht beide.

F. Geben Sie einen Symbolisierungsschlüssel an und symbolisieren Sie die folgenden deutschen Sätze in der WFL.

1. Wenn Essen in den Pridelands zu finden ist, dann wird Rafiki über zerquetschte Bananen reden.
2. Rafiki wird über zerquetschte Bananen reden, es sei denn Simba lebt.
3. Rafiki wird über zerquetschte Bananen reden oder auch nicht; wie dem auch sei, es wird Essen in den Pridelands zu finden sein.
4. Scar wird König bleiben dann und nur dann, wenn Essen in den Pridelands zu finden ist.
5. Wenn Simba lebt, dann wird Scar nicht König bleiben.

G. Für jedes Argument, geben Sie einen Symbolisierungsschlüssel an und symbolisieren Sie alle Sätze des Arguments in WFL.

1. Wenn Dorothy morgens Klavier spielt, dann wacht Roger unleidlich auf. Dorothy spielt morgens Klavier, es sei denn sie wird abgelenkt. Also, wenn Roger nicht unleidlich aufwacht, dann muss Dorothy abgelenkt werden.
2. Dienstags wird es entweder regnen oder schneien. Wenn es regnet, wird Neville traurig sein. Wenn es schneit, dann

wird Neville kalt sein. Folglich wird Neville Dienstags entweder traurig oder kalt sein.

3. Wenn Zoog sich an seine häuslichen Pflichten erinnert, dann sind Dinge sauber, aber nicht ordentlich. Wenn er auf sie vergessen hat, dann sind Dinge ordentlich, aber nicht sauber. Demzufolge sind Dinge entweder ordentlich oder sauber, aber nicht beides.

H. Für jedes Argument, geben Sie einen Symbolisierungsschlüssel an und symbolisieren Sie alle Sätze des Arguments, so gut es geht, in WFL. Die Passage in Kursiv erklärt die Umstände und muss nicht symbolisiert werden.

1. Es regnet bald. Ich weiß das, weil mein Bein schmerzt und mein Bein schmert wenn es bald regnet.
2. *Spider-man versucht, den Plan des Bösewichts zu erkennnen.* Wenn Doctor Octopus das Uranium kriegt, dann wird er die Stadt erpressen. Ich bin mir dessen sicher, weil, wenn Doctor Octopus das Uranium kriegt, dann kann er eine schmutzige Bombe bauen und wenn er eine schmutzige Bombe bauen kann, dann wird er die Stadt erpressen.
3. *Wir versuchen die Politik der chinesichen Regierung zu verstehen.* Wenn die Chinesische Regierung den Wassermangel in Peking nicht lösen kann, dann wird sie die Hauptstadt verlegen müssen. Das will sie nicht. Also muss sie den Wassermangel lösen. Aber der einzige Weg das zu tun ist, fast das gesamte Wasser des Yangze-Flusses nach Norden umzuleiten. Deshalb wird die chinesische Regierung das Projekt zur Umleitung von Wasser aus dem Süden in den Norden unterstützen.

I. Wir symbolisierten das *ausschließende oder* mit '$\vee$', '$\wedge$' und '$\neg$'. Wie könnten Sie ein *ausschließendes oder* mit nur zwei Junktoren symbolisieren? Gibt es eine Möglichkeit, ein *ausschließendes oder* mit nur einem Junktor zu symbolisieren?

KAPITEL 6

Sätze der WFL

Der Satz 'Entweder sind Äpfel rot oder Beeren sind blau' ist ein Satz der deutschen Sprache und der Satz '$(A \vee B)$' ist ein Satz der WFL. Obwohl wir Sätze der deutschen Sprache erkennen können, wenn wir ihnen begegnen, haben wir keine formale Definition von 'Satz der deutschen Sprache'. Aber in diesem Kapitel werden wir genau definieren, was als ein Satz der WFL gilt. Dies ist ein Aspekt, in dem eine formale Sprache wie die WFL präziser als eine natürliche Sprache wie Deutsch ist.

6.1 Ausdrücke

Uns sind bereits drei verschiedene Arten von Symbolen der WFL bekannt:

Einfache Sätze	$A, B, C, \ldots, Z$
falls nötig, mit Subskripten	$A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$
Junktoren	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Klammern	(,)

Ein AUSDRUCK DER WFL ist eine beliebige Zeichenfolge von Symbolen der WFL. Also: Wenn Sie eine beliebige Folge von Symbolen der WFL aufschreiben, in beliebiger Reihenfolge, dann haben Sie einen Ausdruck der WFL.

6.2 Sätze

Angesichts dessen, was wir gerade gesagt haben, ist '$(A \wedge B)$' ein Ausdruck der WFL. Das gleiche gilt aber auch für '$\neg)(\vee() \wedge (\neg\neg())((B$'. Ersteres ist jedoch ein *Satz*, während letzteres *Unsinn* ist. Wir brauchen also einige Regeln, die uns sagen, welche WFL-Ausdrücke Sätze sind und nicht nur Unsinn.

Klar ist, dass einzelne Satzbuchstaben wie 'A' und 'G_{13}' als Sätze zählen. (Wir nennen sie auch *einfache Sätze.*) Aus ihnen können wir weitere Sätze bilden, indem wir die Junktoren verwenden. Mit Hilfe der Negation können wir '$\neg A$' und '$\neg G_{13}$' bilden. Mit Hilfe der Konjunktion können wir '$(A \wedge G_{13})$', '$(G_{13} \wedge A)$', '$(A \wedge A)$' und '$(G_{13} \wedge G_{13})$' bilden. Wir könnten auch wiederholt die Negation anwenden, um Sätze wie '$\neg\neg A$' zu erhalten. Oder die Negation zusammen mit der Konjunktion anwenden, um Sätze wie '$\neg(A \wedge G_{13})$' und '$\neg(G_{13} \wedge \neg G_{13})$' zu erhalten. Die Kombinationsmöglichkeiten sind endlos, selbst wenn man nur mit diesen beiden Satzbuchstaben beginnt. Hinzu kommt, dass es auch unendlich viele Satzbuchstaben gibt! Es macht also keinen Sinn, alle Sätze einzeln aufzulisten.

Stattdessen werden wir den Prozess beschreiben, durch den Sätze *konstruiert* werden können. Betrachten wir die Negation: Für jeden beliebigen Satzes $\mathscr{A}$ der WFL ist $\neg\mathscr{A}$ ein Satz der WFL. (Warum die komische Schriftart? Darauf kommen wir in §8.3 zurück). Wir können ähnliche Dinge für jeden der anderen Junktoren sagen. Wenn zum Beispiel $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze der WFL sind, dann ist $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ ein Satz der WFL. Wenn wir für alle Junktoren Klauseln wie diese geben, dann kommen wir zu der folgenden formalen Definition eines SATZES DER WFL:

1. Jeder Satzbuchstabe ist ein Satz.
2. Wenn $\mathscr{A}$ ein Satz ist, dann ist $\neg\mathscr{A}$ ein Satz.
3. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze sind, dann ist $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ ein Satz.
4. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze sind, dann ist $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ ein Satz.
5. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze sind, dann ist $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ ein Satz.
6. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze sind, dann ist $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ ein Satz.
7. Nichts anderes ist ein Satz.

Definitionen wie diese werden *induktiv* genannt. Solche Definitionen beginnen mit einigen spezifizierbaren Basiselementen und zeigen dann Wege auf, wie man durch das Zusammensetzen von schon spezifizierten Elementen weitere Elemente baut. Damit wir uns besser vorstellen können, was eine induktive Definition ist, können wir eine induktive Definition des Begriffs eines *Vorfahren* geben. Wir spezifizieren einen Basissatz.

- Meine Eltern sind meine Vorfahren.

und geben dann weitere Klauseln wie

- Wenn x einer meiner Vorfahren ist, dann sind die Eltern von x meine Vorfahren.
- Nichts anderes ist einer meiner Vorfahren.

an. Anhand dieser Definition können wir leicht überprüfen, ob jemand mein Vorfahre ist: Wir prüfen einfach, ob er der Elternteil eines Elternteils... einer meiner Eltern ist. Dasselbe gilt auch für unsere induktive Definition von Sätzen der WFL. Genau so wie die induktive Definition es erlaubt, komplexe Sätze aus einfacheren Teilen aufzubauen, erlaubt sie uns auch, komplexe Sätze in ihre einfacheren Teile zu zerlegen. Wenn wir erst einmal zu den Satzbuchstaben kommen, dann wissen wir, dass wir was richtig gemacht haben.

Lassen Sie uns einige Beispiele betrachten.

Nehmen Sie an, wir wollen wissen, ob '$\neg\neg\neg D$' ein Satz der WFL ist. Mittels der zweiten Klausel der Definition wissen wir, dass '$\neg\neg\neg D$' ein Satz ist *wenn* '$\neg\neg D$' ein Satz ist. Jetzt müssen wir also fragen, ob '$\neg\neg D$' ein Satz ist oder nicht. Betrachten wir noch einmal den zweiten Satz der Definition, dann ist '$\neg\neg D$' ein Satz *wenn* '$\neg D$' ein Satz ist. Schließlich ist '$\neg D$' ein Satz *wenn* 'D' ein Satz ist. Da 'D' aber ein Satzbuchstabe der WFL ist, wissen wir, dass 'D' ein Satz ist; dies verdanken wir der ersten Klausel unserer induktiven Definition. Für einen zusammengesetzten Satz wie '$\neg\neg\neg D$' müssen wir nur die Definition wiederholt anwenden. Schlussendlich gelangen wir zu den Satzbuchstaben, aus denen der Satz aufgebaut ist.

Als nächstes betrachten wir das Beispiel '$\neg\neg(P \wedge \neg(\neg Q \vee R))$'. Betrachtet man den zweiten Satz der Definition, so ist dies ein Satz, wenn '$(P \wedge \neg(\neg Q \vee R))$' ein Satz ist, und dies ist ein Satz, wenn 'P' *und* '$\neg(\neg Q \vee R)$' Sätze sind. Ersterer ist ein Satzbuchstabe und letzterer ist ein Satz, wenn '$(\neg Q \vee R)$' ein Satz ist. Das ist ein Satz. Denn wenn man sich die vierte Klausel unserer Definition ansieht, dann ist dies ein Satz, wenn sowohl '$\neg Q$' als auch 'R' Sätze sind. Und das sind sie!

Letztendlich ist jeder Satz aus Satzbuchstaben gebaut. Wenn wir es mit einem Satz zu tun haben, der selbst kein Satzbuchstabe ist, dann können wir sehen, dass es irgendeinen Junktor geben muss, der bei der Konstruktion dieses Satzes als *Letzter* genutzt wurde. Wir nennen dieses Junktor den HAUPTJUNKTOR des Satzes. Im Fall von '$\neg\neg\neg D$' ist der Hauptjunktor das allererste '$\neg$'-Symbol. Im Falle von '$(P \wedge \neg(\neg Q \vee R))$' ist der Hauptjunktor '$\wedge$'. Im Fall von '$((\neg E \vee F) \rightarrow \neg\neg G)$' ist der Hauptjunktor'$\rightarrow$'.

In der Regel können Sie den Hauptjunktor eines Satzes mit Hilfe der folgenden Methode finden:

- Wenn das erste Symbol des Satzes '$\neg$' ist, dann ist dies der

Hauptjunktor.

- Andernfalls beginnen Sie die Klammern zu zählen. Für jede offene Klammer, '(', addiere 1; für jede geschlossene Klammer, i.e., ')', subtrahiere 1. Wenn der Zähler genau bei 1 ist, dann ist der nächste Junktor (*außer* '¬') der Hauptjunktor.

(Anmerkung: Wenn Sie diese Methode verwenden, dann achten Sie darauf, dass Sie alle Klammern im relevanten Satz kenntlich machen, anstatt einige auszulassen, wie es die Konventionen von S6.3 vorsehen)!

Die induktive Struktur von Sätzen der WFL ist wichtig, wenn wir die Umstände betrachten, unter denen ein bestimmter Satz wahr oder falsch ist. Der Satz '$\neg\neg\neg D$' ist wahr dann und nur dann, wenn der Satz '$\neg\neg D$' falsch ist, und so weiter der Struktur des Satzes folgend, bis wir zu den einfachen Sätzen, den Satzbuchstaben gelangen. Wir werden hierauf in Teil III zurückkommen.

Die induktive Struktur von Sätzen der WFL erlaubt es uns auch, eine formale Definition des GELTUNGSBEREICHS einer Negation zu geben (erwähnt in §5.2). Der Geltungsbereich eines '¬' ist der Teilsatz, für den '¬' der Hauptjunktor ist. Betrachten Sie einen Satz wie:

$$(P \land (\neg(R \land B) \leftrightarrow Q))$$

der durch die Verbindung von 'P' mit '$(\neg(R \land B) \leftrightarrow Q)$' gebaut wurde. Dieser Satz wiederum wurde konstruiert, indem ein Bikonditional zwischen '$\neg(R \land B)$' und 'Q' gesetzt wurde. Der erstere dieser zwei Sätze wiederum – ein Teilsatz unseres ursprünglichen Satzes – ist ein Satz, dessen Hauptjunktor '¬' ist. Der Geltungsbereich der Negation ist also nur '$\neg(R \land B)$'. Allgemeiner ausgedrückt:

> Der GELTUNGSBEREICH eines Junktors (in einem Satz) ist der Teilsatz, für den dieser Junktor der Hauptjunktor ist.

6.3 Klammerkonventionen

Streng genommen sind die Klammern in '$(Q \wedge R)$' ein unverzichtbarer Bestandteil des Satzes. Das liegt zum Teil daran, dass wir '$(Q \wedge R)$' als Teilsatz in einem komplizierteren Satz verwenden könnten. Zum Beispiel könnten wir '$(Q \wedge R)$' negieren und so '$\neg(Q \wedge R)$' erhalten. Wenn wir nur '$Q \wedge R$' ohne die Klammern hätten und eine Negation davor setzen würden, bekämen wir '$\neg Q \wedge R$'. Es ist natürlich, dies so zu lesen, dass es dasselbe bedeutet wie '$(\neg Q \wedge R)$', aber wie wir in §5.2 gesehen haben, unterscheidet sich dies von '$\neg(Q \wedge R)$'.

Streng genommen ist '$Q \wedge R$' also *kein* Satz. Es ist ein bloßer *Ausdruck*. Wenn wir jedoch mit der WFL arbeiten, wird es unser Leben erleichtern, wenn wir manchmal etwas weniger streng sind. Hier sind also einige praktische Konventionen.

Erstens erlauben wir uns, die *äußersten* Klammern eines Satzes wegzulassen. So erlauben wir uns, '$Q \wedge R$' anstelle des Satzes '$(Q \wedge R)$' zu schreiben. Wir müssen jedoch daran denken, die Klammern wieder einzufügen, wenn wir den Satz in einen komplizierteren Satz einbetten wollen.

Zweitens können lange Sätze mit vielen verschachtelten Klammernpaaren schwer leserlich sein. Um uns das Lesen zu erleichtern, werden wir uns erlauben, eckige Klammern, '[' und ']', anstelle von runden Klammern zu verwenden. Es gibt also beispielsweise keinen logischen Unterschied zwischen '$(P \vee Q)$' und '$[P \vee Q]$'.

Wenn wir diese beiden Konventionen kombinieren, können wir den sperrigen Satz

$$(((H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)) \wedge (J \vee K))$$

etwas deutlicher umformulieren, nämlich wie folgt:

$$\big[(H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)\big] \wedge (J \vee K)$$

Der Geltungsbereich der einzelnen Junktore ist nun leichter ersichtlich.

Übungen

A. Für jedes der folgenden Dinge: (a) Handelt es sich, streng genommen, um einen Satz der WFL? (b) Handelt es sich um einen Satz der WFL, wenn wir unsere lockeren Klammerkonventionen berücksichtigen?

1. (A)
2. $J_{374} \vee \neg J_{374}$
3. $\neg\neg\neg\neg F$
4. $\neg \wedge S$
5. $(G \wedge \neg G)$
6. $(A \rightarrow (A \wedge \neg F)) \vee (D \leftrightarrow E)$
7. $[(Z \leftrightarrow S) \rightarrow W] \wedge [J \vee X]$
8. $(F \leftrightarrow \neg D \rightarrow J) \vee (C \wedge D)$

B. Gibt es Sätze der WFL, die keine Satzbuchstaben enthalten? Begründen Sie.

C. Welchen Geltungsbereich haben die einzelnen Junktoren im folgenden Satz?

$$\big[(H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)\big] \wedge (J \vee K)$$

KAPITEL 7

Mehrdeutigkeit

Im Deutschen können Sätze MEHRDEUTIG sein, d.h. sie können mehr als eine Bedeutung haben. Es gibt viele Quellen der Mehrdeutigkeit. Eine davon ist die *lexische Mehrdeutigkeit*: Ein Satz kann Wörter enthalten, die mehr als eine Bedeutung haben. Zum Beispiel kann 'Bank' eine Parkbank oder eine Finanzinstitution bedeuten. Ich könnte also sagen: 'Ich gehe zur Bank', wenn ich einen Spaziergang im Park mache und mich auf eine Parkbank setzen will, oder, wenn ich ein Konto eröffnen will. Je nach Situation zielen wir auf unterschiedliche Bedeutungen von 'Bank' ab. Also drückt der Satz, wenn er in diesen unterschiedlichen Situationen geäußert wird, unterschiedliche Bedeutungen aus.

Eine andere Art von Zweideutigkeit ist die *strukturelle Mehrdeutigkeit*. Sie entsteht, wenn ein Satz auf unterschiedliche Weise interpretiert werden kann und je nach Interpretation eine andere Bedeutung ausgewählt wird. Hier ist ein Beispiel:

> Alice sah ihren Nachbarn mit einem Fernglas.

Dieser Satz kann auf zwei verschiedene Weisen interpretiert werden. Laut einer Interpretation ist das Fernglas das Werkzeug, mittels dessen Alice ihren Nachbarn sah. Der Satz besagt also, dass Alice ein Fernglas hat und, dass sie ihren Nachbarn gesehen hat, als sie ihr Fernglas benutzt hat. Laut der zweiten Interpretation is das Fernglas im Besitz des Nachbarn. Der Satz besagt also, dass Alice ihren Nachbarn sah und, dass dieser Nachbar gerade ein Fernglas dabei hatte.

Wenn der Satz geäußert wird, ist in der Regel nur eine Bedeutung beabsichtigt. Welche der möglichen Bedeutungen mit der Äußerung eines Satzes beabsichtigt ist, wird durch den Kontext oder manchmal auch durch die Art der Äußerung bestimmt (z.B. dadurch, welche Teile des Satzes betont werden). Oft ist es sogar schwer, die unbeabsichtigte Lesart zu sehen. Dies kann ein Grund sein, wieso ein Witz funktioniert, wie in diesem englischsprachigen Beispiel von Groucho Marx:

> One morning I shot an elephant in my pajamas.
> How he got in my pajamas, I don't know.

Mehrdeutigkeit hat oft mit Vagheit zu tun, ist aber nicht dasselbe wie sie. Ein Adjektiv, z.B. 'reich' oder 'groß', ist VAGE, wenn es nicht immer möglich ist, zu bestimmen, ob es zutrifft oder nicht. Eine Person, die zum Beispiel 1,9 m groß ist, ist klarerweise groß, aber ein Gebäude dieser Größe ist winzig. Hier spielt der Kontext eine Rolle bei der Bestimmung der eindeutigen Fälle und der eindeutigen Nicht-Fälle ('groß für eine Person', 'groß für einen Basketballspieler', 'groß für ein Gebäude'). Doch selbst wenn der Kontext klar ist, gibt es immer noch Fälle, die im vagen Bereich liegen (wie viele cm muss man groß sein um als groß zu gelten? 1,78m, 1,79m?), sogenannte GRENZFÄLLE.

In der WFL bemühen wir uns im Allgemeinen, Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Wir werden versuchen, unsere Symbolisierungsschlüssel so zu gestalten, dass sie keine mehrdeutigen Wörter verwenden oder sie zu vereindeutigen, wenn ein Wort mehrere Bedeutungen hat. So benötigt z.B. Ihr Symbolisierungsschlüssel zwei verschiedene Satzbuchstaben für 'Rebecca ging zur (Geld-)Bank' und 'Rebecca ging zur (Park-)Bank'. Vagheit ist schwieriger zu vermeiden. Da wir festgelegt haben, dass in jedem Fall (und später bei jeder Bewertung) jeder einfache Satz (oder Satzbuchstabe) entweder wahr oder falsch ist, können wir Grenzfälle in der WFL nicht berücksichtigen.

Ein wichtiges Merkmal von Sätzen der WFL ist, dass sie strukturell nicht mehrdeutig sein dürfen. Jeder Satz der WFL kann auf eine und nur auf eine Weise interpretiert werden. Dieses Merkmal der WFL ist eine Stärke. Wenn ein deutscher Satz strukturell mehrdeutig ist, kann uns die WFL dabei helfen, die verschiedenen Bedeutungen klar zu unterscheiden. Obwohl wir im Alltag ziemlich gut mit Mehrdeutigkeiten umgehen können, kann es manchmal sehr wichtig sein, sie zu vermeiden. Die Logik kann dann sinnvoll angewendet werden: Sie hilft Philosoph*innen, ihre Gedanken klar auszudrücken, Mathematiker*innen, ihre Theoreme rigoros zu formulieren, und Software-Ingenieur*innen, Datenbankabfragen oder Verifikationskriterien eindeutig zu spezifizieren.

Auch im Gesetz ist es von entscheidender Bedeutung, Dinge eindeutig zu formulieren. Hier kann Mehrdeutigkeit eine Frage von Leben und Tod sein. Hier ist ein berühmtes Beispiel dafür, dass ein Todesurteil von der Interpretation einer Mehrdeutigkeit im Gesetz abhängt. Roger Casement (1864-1916) war ein britischer Diplomat, der zu seiner Zeit berühmt war, weil er Menschenrechtsverletzungen im Kongo und in Peru publik machte (dafür wurde er 1911 zum Ritter geschlagen). Er war auch ein irischer Nationalist. In den Jahren 1914-16 reiste Casement heimlich nach Deutschland, mit dem sich Großbritannien zu dieser Zeit im Krieg befand, und versuchte, irische Kriegsgefangene für den Kampf gegen Großbritannien und für die irische Unabhängigkeit zu rekrutieren. Nach seiner Rückkehr nach Irland wurde er von den Briten gefangen genommen und wegen Hochverrats angeklagt.

Das Gesetz, nach dem Casement vor Gericht gestellt wurde, ist der *Treason Act of 1351*. Dieses Gesetz legt fest, was als Hochverrat gilt. Also musste die Staatsanwaltschaft bei der Verhandlung nachweisen, dass Casements Handlungen die im Gesetz festgelegten Kriterien erfüllten. In der entsprechenden Passage hieß es, dass sich jemand des Hochverrats schuldig macht

> if a man is adherent to the King's enemies in his realm, giving to them aid and comfort in the realm, or elsewhere.

> (wenn ein Mann sich in seinem Reich an die Feinde des Königs bindet und ihnen im Reich Hilfe und Trost spendet oder anderswo.)

Die Verteidigung Casements hing am letzten Komma dieses Satzes, welches im französischen Originaltext des Gesetzes von 1351 nicht vorhanden ist. Es war unstrittig, dass Casement ‘an die Feinde des Königs’ gebunden war, aber die Frage war, ob die Bindung an die Feinde des Königs nur dann Hochverrat darstellte, wenn sie im Reich stattfand, oder auch, wenn sie im Ausland erfolgte. Die Verteidigung argumentierte, dass das Gesetz zweideutig sei. Die behauptete Zweideutigkeit hing davon ab, ob ‘oder anderswo’ nur ‘den Feinden des Königs Hilfe und Trost spenden’ zukam (die natürliche Lesart ohne Komma) oder sowohl ‘an die Feinde des Königs bindet’ als auch ‘den Feinden des Königs Hilfe und Trost spenden’ (die natürliche Lesart mit Komma). Auch wenn die erstere Interpretation weit hergeholt erscheinen mag, war das Argument zu ihren Gunsten nicht schlecht. Dennoch entschied das Gericht, dass die Passage mit dem Komma gelesen werden sollte, so dass Casements Eskapaden in Deutschland als Hochverrat galten und er zum Tode verurteilt wurde. Casement selbst schrieb, dass er ‘wegen eines Komma gehängt wurde’.

Wir können WFL verwenden, um beide Lesarten des Textes zu symbolisieren und damit die Eindeutigkeit zu erreichen. Zunächst brauchen wir einen Symbolisierungsschlüssel:

A: Casement war in seinem Reich an die Feinde des Königs gebunden.
G: Casement spendete den Feinden des Königs Hilfe und Trost in seinem Reich.
B: Casement war anderswo an die Feinde des Königs gebunden.
H: Casement spendete anderswo den Feinden des Königs Hilfe und Trost.

Die Interpretation, nach der das Verhalten von Casement nicht als Hochverrat gilt, lautet wie folgt:

$$A \vee (G \vee H)$$

Die Interpretation, die in seinem Todesurteil resultierte, kann hingegen folgendermaßen symbolisiert werden:

$$(A \vee B) \vee (G \vee H)$$

Dieser Satz ist wahr. Zwar gab Casement den Feinden des Königs weder innerhalb noch außerhalb des Reichs Hilfe und Trost (G und H sind falsch). Zudem band sich Casement im Reich des Königs nicht an seine Feinde (A ist falsch). Doch er band sich im Ausland an die Feinde des Königs (B ist wahr). Und das reicht aus, um die Disjunktion $(A \vee B) \vee (G \vee H)$ wahr zu machen.

Eine häufige Quelle der strukturellen Mehrdeutigkeit im Deutschen ist das Fehlen von Klammern. Wenn ich zum Beispiel sage: 'Ich mag Filme, die nicht lang und langweilig sind', werden Sie wahrscheinlich denken, dass ich Filme, die lang und langweilig sind, nicht mag. Eine weniger wahrscheinliche, aber mögliche Interpretation ist, dass ich Filme mag, die sowohl (a) nicht lang als auch (b) langweilig sind. Die erste Interpretation ist wahrscheinlicher, denn wer mag schon langweilige Filme? Aber was ist mit: 'Ich mag Gerichte, die nicht süß und schmackhaft sind'? Hier ist die wahrscheinlichere Interpretation, dass ich pikante, schmackhafte Gerichte mag. (Natürlich hätte ich das auch besser sagen können, z.B.: 'Ich mag Gerichte, die nicht süß sind, aber schmackhaft'). Ähnliche Mehrdeutigkeiten ergeben sich aus dem Zusammenspiel von 'und' mit 'oder'. Nehmen wir zum Beispiel an, ich bitte Sie, mir ein Bild von einem kleinen und gefährlichen oder schleichendem Tier zu schicken. Würde ein Leopard zählen? Er schleicht, ist aber nicht klein. Ob ein Bild eines Leopards meiner Bitte nachkommen würde hängt also davon ab, ob ich kleine, entweder gefährliche oder schleichende Tiere suche (Leoparden zählen nicht), oder ob ich entweder ein kleines, gefährliches Tier oder ein schleichendes Tier (jeder Größe) suche.

Diese Arten von Mehrdeutigkeiten werden *Mehrdeutigkeiten im Geltungsbereich* genannt, da sie davon abhängen, ob ein Junktor im

Geltungsbereich eines anderen liegt oder nicht. Der Satz '*Avengers: Endgame* ist nicht lang und langweilig' lässt die folgenden zwei Interpretationen zu:

1. *Avengers: Endgame* ist nicht: sowohl lang als auch langweilig.
2. *Avengers: Endgame* ist sowohl nicht lang als auch langweilig.

Satz 2 ist sicherlich falsch, da *Avengers: Endgame* mehr als drei Stunden lang ist. Ob Sie denken, dass 1 wahr ist, hängt davon ab, ob sie denken, dass der Film langweilig ist oder nicht.

Lasst uns den folgenden Symbolisierungsschlüssel nutzen:

B: *Avengers: Endgame* ist langweilig.
L: *Avengers: Endgame* ist lang.

Satz 1 kann nun als '$\neg(L \wedge B)$' symbolisiert werden, während Satz 2 als '$\neg L \wedge B$' symbolisiert wird. Im ersten Fall liegt das '$\wedge$' im Geltungsbereich von '$\neg$', im zweiten Fall liegt '$\neg$' im Geltungsbereich von '$\wedge$'.

Der Satz 'Jonas ist klein und gefährlich oder verstohlen' ist auch mehrdeutig:

3. Jonas ist entweder sowohl klein und gefährlich oder verstohlen.
4. Jonas ist sowohl klein als auch entweder gefährlich oder verstohlen.

Hier nutzen wir den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

D: Jonas ist gefährlich.
S: Jonas ist klein.
T: Jonas ist verstohlen.

Die Symbolisierung von Satz 3 ist '$(S \wedge D) \vee T$', die von Satz 4 ist '$S \wedge (D \vee T)$'. Im ersten Satz ist '$\wedge$' im Geltungsbereich von '$\vee$', im zweiten Satz ist '$\vee$' im Geltungsbereich von '$\wedge$'.

Übungen

A. Die folgenden Sätze sind mehrdeutig. Geben Sie für jeden Satz einen Symbolisierungsschlüssel an und symbolisieren Sie die verschiedenen Interpretationen.

1. Haskell beobachtet gerne Eisvögel mit Ferngläsern.
2. Der Zoo hat Löwen oder Tiger und Bären.
3. Die Blume ist nicht rot oder duftend.

KAPITEL 8

Verwendung und Erwähnung

In diesem Teil haben wir viel *über* Sätze gesprochen. Wir sollten an dieser Stelle eine Pause einlegen, um einen wichtigen und sehr allgemeinen Punkt zu erläutern.

8.1 Zitierkonventionen

Betrachten Sie die folgenden zwei Sätze:

- Angela Merkel ist Bundeskanzlerin.
- Der Ausdruck 'Angela Merkel' besteht aus zwei Großbuchstaben und zehn Kleinbuchstaben.

Wollen wir über die Bundeskanzlerin sprechen, dann *verwenden* wir ihren Namen. Wenn wir hingegen über den Namen der Bundeskanzlerin sprechen wollen, dann *erwähnen* wir diesen Namen; dies tun wir, indem wir ihn in Anführungszeichen setzen.

Generell gilt: Wollen wir über Dinge in der Welt sprechen, *verwenden* wir Worte. Wenn wir hingegen über Worte sprechen wollen, müssen wir normalerweise diese Worte *erwähnen*. Wir müssen darauf hinweisen, dass wir sie erwähnen, anstatt sie zu verwenden. Dazu ist eine gewisse Konvention erforderlich. Wir setze sie in Anführungszeichen. Also sagt dieser Satz:

- 'Angela Merkel' ist Bundeskanzlerin.

dass ein *Ausdruck* der deutschen Sprache Bundeskanzlerin ist. Das ist nicht wahr. Die *Frau* ist Bundeskanlerin; ihr *Name* nicht. Umgekehrt drückt der folgende Satz:

- Angela Merkel besteht aus zwei Großbuchstaben und zehn Kleinbuchstaben.

etwas Falsches aus. Angela Merkel ist eine Frau aus Fleisch und Blut, und nicht aus Buchstaben.

Die hier erwähnten Regeln für das Zitieren sind nicht nur in der Logik wichtig, sondern kommen Ihnen bei all Ihren Arbeiten zu Gute! Mit Hilfe der Anführungszeichen zeigen Sie, dass Sie sich nicht auf einen Gegenstand beziehen, sondern auf einen Namen dieses Gegenstands.

8.2 Objektsprache und Metasprache

Diese allgemeinen Zitierkonventionen sind wichtig für uns, weil wir hier eine formale Sprache, die WFL, beschreiben und deshalb oft Ausdrücke aus der WFL *erwähnen* müssen.

Wenn wir über eine Sprache sprechen, dann wird die Sprache, über die wir sprechen, als OBJEKTSPRACHE bezeichnet. Gewissermaßen machen wir diese Sprache zum Objekt unserer Untersuchung. Die Sprache, die wir verwenden, um über die Objektsprache zu sprechen, wird hingegen als METASPRACHE bezeichnet.

Die Objektsprache in diesem Kapitel war zu meist die von uns entwickelte formale Sprache, WFL. Die Metasprache dagegen war Deutsch. Nicht alltägliches Deutsch, sondern Deutsch, ergänzt durch zusätzliches Vokabular, das uns helfen soll, unsere Objektsprache zu verstehen.

Wir haben Großbuchstaben als Satzbuchstaben der WFL verwendet:

$$A, B, C, Z, A_1, B_4, A_{25}, J_{375}, \ldots$$

Diese sind Sätze der Objektsprache, WFL. Sie sind nicht Sätze des Deutschen. Also können wir nicht sagen, dass:

- D ist ein Satzbuchstabe der WFL.

Offensichtlich versuchen wir hier, einen deutschen Satz zu finden, der etwas über die Objektsprache (WFL) aussagt, aber 'D' ist ein Satz der WFL und nicht Teil des Deutschen. Das Vorhergehende ist also Unsinn, genau wie:

- Snow is white ist ein englischer Satz.

Was wir hier auszudrücken versuchen ist eigentlich:

- 'Snow is white' ist ein englischer Satz.

Ebenso, was wir vorher ausdrücken wollten, war einfach:

- 'D' ist ein Satzbuchstabe der WFL.

Der allgemeine Punkt ist, dass wir immer dann, wenn wir im Deutschen über einen bestimmten Ausdruck der WFL sprechen wollen, darauf hinweisen müssen, dass wir den Ausdruck *erwähnen* und nicht verwenden. Hierzu verwenden wir Anführungszeichen.

8.3 Metavariablen

Wir wollen jedoch nicht nur über *einzelne* Ausdrücke der WFL sprechen. Wir wollen auch in der Lage sein, über *beliebige* Ausdrücke der WFL zu sprechen. Dies mussten wir sogar tun, als wir die induktive Definition eines Satzes der WFL vorstellten. Dazu verwendeten wir Großbuchstaben, nämlich

$$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \ldots$$

Diese Symbole sind nicht Teil der WFL. Vielmehr sind sie Teil unserer (erweiterten) Metasprache, mit der wir über alle Ausdrücke der WFL sprechen. Um zu erklären, warum wir sie brauchen, erinnern Sie sich an die zweite Klausel der induktiven Definition eines Satzes der WFL:

2. Wenn $\mathscr{A}$ ein Satz ist, dann ist $\neg\mathscr{A}$ ein Satz.

Hier geht es um beliebige Sätze. Wenn wir stattdessen das Folgende geschrieben hätten:

- Wenn 'A' ein Satz ist, dann ist '$\neg A$' ein Satz.

dann wären wir nicht in der Lage gewesen zu bestimmen, ob '$\neg B$' ein Satz ist. Die Definition hätte sich nur auf 'A' bezogen. Zusammengefasst:

> '$\mathscr{A}$' ist ein Symbol (METAVARIABLE genannt) des erweiterten Deutschen, das wir nutzen um über beliebige Sätze der WFL zu sprechen. 'A' hingegen ist ein einzelner Satzbuchstabe der WFL.

Das letzte Beispiel wirft allerdings eine weitere Komplikation auf, die unsere Zitierkonventionen betrifft. Wir haben keine Anführungszeichen in die zweite Klausel unserer induktiven Definition aufgenommen. Hätten wir das tun sollen?

Das Problem ist, dass der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Klausel, d.h. '$\neg\mathscr{A}$', kein deutscher Satz ist, da er '$\neg$' enthält. Wir könnten also versuchen zu schreiben:

2′. Wenn $\mathscr{A}$ ein Satz ist, dann ist '$\neg\mathscr{A}$' ein Satz.

Aber das hilft uns nicht weiter: '$\neg\mathscr{A}$' ist kein Satz der WFL, da '$\mathscr{A}$' ein Symbol des (erweiterten) Deutschen und kein Symbold der WFL ist.

Was wir wirklich sagen wollen, ist sowas wie:

2″. Wenn $\mathscr{A}$ ein Satz ist, dann ist das Ergebnis des Verknüpfens des Symbols '$\neg$' mit dem Satz $\mathscr{A}$ ein Satz.

Diese Klausel ist korrekt, aber ziemlich langwierig. Diese Langwierigkeit können wir jedoch vermeiden, indem wir unsere eigenen Konventionen schaffen. Wir können festlegen, dass ein Ausdruck wie '$\neg\mathscr{A}$' in unserer Metasprache einfach eine Abkürzung ist für:

> das Ergebnis des Verknüpfens des Symbols '$\neg$' mit dem Satz $\mathscr{A}$

Ähnliches sagen wir dann auch für Ausdrücke wie '$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$', '$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$', usw.

8.4 Zitierkonventionen für Argumente

Wir verwenden die WFL großteils, weil wir Argumente untersuchen wollen. Dies wird unser Anliegen in Kapitel III sein. Im Deutschen werden die Prämissen eines Arguments oft durch einzelne Sätze und die Schlussfolgerung durch einen weiteren Satz ausgedrückt. Da wir deutsche Sätze in der WFL symbolisieren können, können wir auch deutsche Argumente in der WFL symbolisieren.

Genauer gesagt können wir WFL verwenden, um jeden der in einem deutschen Argument verwendeten Sätze zu symbolisieren. WFL selbst hat keine Möglichkeit, einige von ihnen als Prämissen und andere als Schlussfolgerung eines Arguments kenn zu zeichnen. (Im Gegensatz zu Deutsch, das Wörter wie 'Also', 'Folglich' usw. verwendet, um anzuzeigen, dass ein Satz die *Schlussfolgerung* eines Arguments ist.)

Wir brauchen also etwas mehr Notation. Angenommen, wir wollen die Prämissen eines Arguments mit $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ und die Schlussfolgerung mit $\mathscr{C}$ symbolisieren. Dann schreiben wir:

$$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$$

Die Rolle des Symbols '$\therefore$' besteht hier darin, anzugeben, welche Sätze des Arguments die Prämissen und welche die Schlussfolgerung sind.

Streng genommen ist das Symbol '$\therefore$' daher nicht Teil der Objektsprache, sondern der *Metasprache*. Daher könnte man meinen, dass wir die WFL-Sätze, die das Symbol flankieren, mit Anführungszeichen versehen müssten. Das ist ein vernünftiger Gedanke, aber das Hinzufügen dieser Anführungszeichen würde die

Lesbarkeit erschweren. Außerdem - und wie oben erwähnt - können wir selbst einige neue Konventionen festlegen. Wir können also festlegen, dass diese Anführungszeichen unnötig sind. Das heißt, wir können

$$A, A \to B \therefore B$$

einfach *ohne Anführungszeichen* aufschreiben, um auf ein Argument hinzuweisen, dessen Prämissen 'A' und '$A \to B$' sind (oder von diesen Ausdrücken symbolisiert werden) und dessen Schlussfolgerung 'B' ist (oder von diesem Ausdruck symbolisiert wird).

TEIL III

Wahrheitstabellen

KAPITEL 9

Charakteristische Wahrheitstabellen

Jeder Satz der WFL setzt sich aus Satzbuchstaben zusammen. Manche Sätze sind einfach nur Satzbuchstaben. In anderen Sätzen wurden Satzbuchstaben mit Hilfe von Junktoren zu komplexen Sätzen kombiniert. Der Wahrheitswert dieser komplexen Sätze hängt nur von den Wahrheitswerten der Satzbuchstaben ab, aus denen sie sich zusammensetzen. Um z.B. den Wahrheitswert von '$(D \wedge E)$' zu berechnen, muss man nur den Wahrheitswert von 'D' und den Wahrheitswert von 'E' kennen.

In Kapitel 5 haben wir fünf Junktoren vorgestellt. Wir müssen also nur erklären, wie diese Junktoren mit Wahrheitswerten umgehen. Der Einfachheit halber kürzen wir 'Wahr' mit 'T' (wie 'true' im Englischen) und 'Falsch' mit 'F' ab. (Zur Klarstellung: die beiden Wahrheitswerte sind Wahr und Falsch; die Wahrheitswerte sind keine Buchstaben.)

Negation. Für jeden Satz $\mathscr{A}$ gilt: Wenn $\mathscr{A}$ wahr ist, dann ist $\neg\mathscr{A}$ falsch; und wenn $\neg\mathscr{A}$ wahr ist, dann ist $\mathscr{A}$ falsch. Wir können dies in der *charakteristischen Wahrheitstabelle* für die Negation zusammenfassen::

$\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A}$
T	F
F	T

Konjunktion. Für alle Sätze $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$ ist wahr genau dann, wenn sowohl $\mathscr{A}$ als auch $\mathscr{B}$ wahr sind. Wir können dies in der *charakteristischen Wahrheitstabelle* für die Konjunktion zusammenfassen:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Die Konjunktion ist *symmetrisch*. Der Wahrheitswert von $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ ist in jedem Fall der gleiche wie der Wahrheitswert von $\mathscr{B} \wedge \mathscr{A}$.

Disjunktion. Es ist wichtig, dass '$\vee$' immer das einschließende 'oder' repräsentiert. Daher gilt für alle Sätze $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$, dass $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ wahr ist genau dann, wenn entweder $\mathscr{A}$ oder $\mathscr{B}$ wahr ist. Wir können dies in der *charakteristischen Wahrheitstabelle* für die Disjunktion zusammenfassen:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Wie die Konjunktion ist auch die Disjunktion symmetrisch.

Konditional. Ehrlich gesagt: Das Konditional ist ein Murks in der WFL. Inwiefern genau, ist unter Philosoph*innen umstritten. Wir werden einige der schwierigen Fragestellungen in §§10.3 und 12.5 diskutieren. Für den Augenblick werden wir Folgendes festlegen: $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ ist falsch genau dann, wenn $\mathscr{A}$ wahr und $\mathscr{B}$ falsch ist. Wir können dies in dieser charakteristischen Wahrheitstabelle zusammenfassen:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Das Konditional ist *asymmetrisch*. Sie können das Antezedens und Konsequens nicht vertauschen, ohne die Bedeutung des Satzes zu verändern; $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ und $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ sind in unterschiedlichen Szenarien wahr und haben daher unterschiedliche Wahrheitstabellen.

Bikonditional. Da ein Bikonditional identisch mit der Konjunktion der in beide Richtungen verlaufenden Konditionale sein soll, wollen wir, dass die Wahrheitstabelle für das Bikonditional so aussieht:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Das Bikonditional ist symmetrisch.

KAPITEL 10

Wahrheitsfunktionale Junktoren

10.1 Der Begriff der Wahrheitsfunktionalität

Wir führen nun eine wichtige Idee ein:

> Ein Junktor ist WAHRHEITSFUNKTIONAL genau dann, wenn der Wahrheitswert eines Satzes mit diesem Junktor als Hauptjunktor eindeutig durch den Wahrheitswert (die Wahrheitswerte) seines (seiner) Teilsatzes (Teilsätze) bestimmt wird.

Jeder Junktor der WFL ist wahrheitsfunktional. Der Wahrheitswert einer Negation wird eindeutig durch den Wahrheitswert des nicht verneinten Satzes bestimmt. Der Wahrheitswert einer Konjunktion wird eindeutig durch den Wahrheitswert der beiden Konjunkte bestimmt. Der Wahrheitswert einer Disjunktion wird eindeutig durch den Wahrheitswert beider Disjunkte bestimmt, usw. Um den Wahrheitswert eines WFL-Satzes zu bestimmen, müssen wir nur den Wahrheitswert seiner Teilsätze kennen.

Diese Eigenschaft ist es, die der WFL ihren Namen gibt: die WFL ist die *wahrheitsfunktionale* Logik.

Viele Sprachen verwenden Junktoren, die nicht wahrheitsfunktional sind. Im Deutschen können wir zum Beispiel aus jedem Satz einen neuen Satz bilden, indem wir ihm das Präfix ‘Es ist notwendig, dass…’ voranstellen. Der Wahrheitswert dieses neuen Satzes wird nicht allein durch den Wahrheitswert des ursprünglichen Satzes festgelegt. Um dies zu sehen, betrachten Sie zwei wahre Sätze:

1. Ein Stein ist ein Stein.
2. Shostakovich hat 15 Streichquartette geschrieben.

Beide dieser Sätze sind wahr. Doch während es notwendig ist, dass ein Stein ein Stein ist, ist es nicht notwendig, dass Schostakowitsch fünfzehn Streichquartette geschrieben hat. Wäre Schostakowitsch früher gestorben, hätte er Quartett Nr. 15 nicht beendet; hätte er länger gelebt, hätte er vielleicht ein paar mehr geschrieben. ‘Es ist notwendig, dass…’ ist also nicht wahrheitsfunktional.

10.2 Symbolisieren und Übersetzen

Alle Junktoren der WFL sind wahrheitsfunktional, aber mehr als das: sie machen wirklich nichts, *außer* einen Wahrheitswert oder mehrere Wahrheitswerte auf einen Wahrheitswert abzubilden.

Wenn wir in der WFL einen Satz oder ein Argument symbolisieren, ignorieren wir alles, was über den Beitrag hinausgeht, den die Wahrheitswerte einer Komponente zum Wahrheitswert des Ganzen leisten. Es gibt Feinheiten in unseren gewöhnlichen Behauptungen, die weit über ihre Wahrheitswerte hinausgehen. Sarkasmus, Poesie, Abfälligkeit, Betonung; das sind wichtige Teile unserer alltäglichen Sprache, aber nichts davon wird in der WFL beibehalten. Wie in §5 angemerkt, kann die WFL die subtilen Unterschiede zwischen den folgenden deutschen Sätzen nicht erfassen:

1. Dana ist eine Logikerin und sie ist eine nette Person.
2. Obwohl Dana eine Logikerin ist, ist sie eine nette Person
3. Dana ist eine Logikerin, trotz ihrer Nettigkeit.
4. Dana ist eine nette Person, aber auch eine Logikerin.

5. Auch wenn Dana eine Logikerin ist, sie ist eine nette Person.

Alle dieser Sätze werden mit dem gleichen Satz der WFL symbolisiert, etwa '$L \wedge N$'.

Nun sagen wir immer wieder, dass wir WFL-Sätze verwenden, um deutsche Sätze zu *symbolisieren*. Viele andere Lehrbücher sprechen stattdessen vom *Übersetzen* deutscher Sätze in die WFL. Eine gute Übersetzung sollte jedoch bestimmte Facetten der Bedeutung bewahren, und die WFL kann das – wie wir gerade gesehen haben – nicht tun. Deshalb werden wir davon sprechen, dass wir deutsche Sätze *symbolisieren*, anstatt sie zu *übersetzen*.

Dies wirkt sich darauf aus, wie wir unsere Symbolisierungsschlüssel verstehen sollten. Betrachten Sie einen Schlüssel wie:

L: Dana ist eine Logikerin.
N: Dana ist eine nette Person.

Andere Lehrbücher werden dies als eine Bestimmung verstehen, dass der WFL-Satz 'L' bedeuten soll, dass Dana eine Logikerin ist, und dass der WFL-Satz 'N' bedeuten soll, dass Dana eine nette Person ist. Aber die WFL ist einfach völlig ungeeignet, mit der *Bedeutung*, in all ihren Feinheiten, umzugehen. Von unserer Perspektive aus tut der vorangehende Symbolisierungsschlüssel nicht mehr als festzulegen, dass der WFL-Satz 'L' denselben Wahrheitswert hat wie der deutsche Satz 'Dana ist eine Logikerin' (welcher das auch sein mag), und dass der WFL-Satz 'N' denselben Wahrheitswert hat wie der deutsche Satz 'Dana ist eine nette Person' (welcher auch immer das sein mag).

Wenn wir einen WFL-Satz so behandeln, als würde er einen deutschen Satz *symbolisieren*, legen wir fest, dass der WFL-Satz den gleichen Wahrheitswert hat wie dieser deutsche Satz.

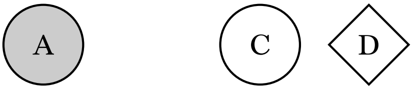
10.3 Indikative und konjunktive Konditionale

Wir wollen nun deutlich machen, dass die WFL nur mit Wahrheitsfunktionen umgehen kann, indem wir den Fall des Konditionals genauer betrachten. Als wir die charakteristische Wahrheitstabelle für den Konditional in §9 eingeführt haben, haben wir nichts gesagt, um sie zu rechtfertigen. Lassen Sie uns nun eine Rechtfertigung anbieten, die Dorothy Edgington folgt.[1]

Lasst uns annehmen, dass Lara einige Formen auf ein Blatt Papier gezeichnet hat und einige davon eingefärbt hat. Wir haben sie nicht gesehen, behaupten aber dennoch:

> Für jede Form gilt: wenn sie grau ist, dann ist sie ein Kreis.

Zufällig hat Lara Folgendes gezeichnet:

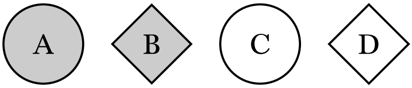


In diesem Fall scheint unsere Behauptung wahr zu sein. Die Formen C und D sind nicht grau und können daher kaum Gegenbeispiele zu unserer Behauptung sein. Form A ist grau, ist aber auch ein Kreis. Unsere Behauptung hat also keine Gegenbeispiele. Sie ist wahr. Das bedeutet, dass jede der folgenden Instanzen unserer Behauptung ebenfalls wahr sein muss:

- Wenn Form A grau ist, dann ist sie ein Kreis. (wahres Antezedens, wahres Konsequens)
- Wenn Form C grau ist, dann ist sie ein Kreis. (falsches Antezedens, wahres Konsequens)
- Wenn Form D grau ist, dann ist sie ein Kreis. (falsches Antezedens, falsches Konsequens)

[1] Dorothy Edgington, 'Conditionals', 2014, in der *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/entries/conditionals/).

Aber hätte Lara eine vierte Form gezeichnet, so wie hier:



dann wäre unsere Behauptung ('wenn eine Form grau ist, dann ist sie ein Kreis') falsch. Dementsprechend ist nun eine der Instanzen unserer Behauptung falsch:

- Wenn Form B grau ist, dann ist sie ein Kreis.
  (wahres Antezedens, falscher Konsequens)

Erinnern Sie sich jetzt daran, dass jeder Junktor der WFL wahrheitsfunktional ist. Auf das Konditional angewandt, bedeutet das, dass die Wahrheitswerte des Antezedens und des Konsequens den Wahrheitswert des Konditionals als Ganzes eindeutig bestimmen müssen. Daher können wir aus den Wahrheitswerten unserer vier Behauptungen – die uns alle möglichen Kombinationen von Wahrheit und Falschheit in Antezedens und Konsequens liefern – die Wahrheitstabelle für den Konditional ablesen.

Was dieses Argument zeigt, ist, dass '$\rightarrow$' der *beste* Kandidat für ein wahrheitsfunktionales Konditional ist. Anders ausgedrückt, es ist das beste Konditional, das die WFL hergibt. Aber taugt es auch als Symbolisierung der verschiedenen Konditionale, die wir in der deutschen Sprache verwenden? Betrachten Sie zwei Sätze:

1. Wenn Hillary Clinton die Wahl 2016 gewonnen hätte, dann wäre sie die erste Präsidentin der USA gewesen.
2. Wenn HIllary Clinton die Wahl 2016 gewonnen hätte, dann hätte sie sich in einen Helium-gefüllten Ballon verwandelt und wäre in den Abendhimmel entflogen.

Satz 1 ist wahr; Satz 2 dagegen falsch. Aber beide haben ein falsches Antezedens und ein wahres Konsequens. (Hillary hat nicht gewonnen; sie wurde nicht die erste Präsidentin der USA; und sie hat sich nicht mit Helium gefüllt, nur um danach in den

Abendhimmel aufzusteigen.) Der Wahrheitswert der beiden Konditionale wird also nicht eindeutig von den Wahrheitswerten ihrer Teilsätze bestimmt.

Wichtig ist hier, dass die Sätze 1 und 2 *konjunktive* Konditionale sind und nicht *indikative* Konditionale. Sie laden uns dazu ein, uns etwas vorzustellen, das im Widerspruch zu den Tatsachen steht – schließlich verlor Hillary Clinton die Wahl 2016. Wir bestimmen den Wahrheitsweit dieser Konditionale dann aufgrund unserer Urteile dazu, was unter diesen Umständen passiert wäre. '$\rightarrow$' dagegen lädt uns nicht zu derartigen Vorstellungen ein.

Wir werden noch weitere Feinheiten der Konditionale in §12.5 behandeln. Vorerst werden wir uns damit begnügen, dass '$\rightarrow$' der einzige Kandidat für einen wahrheitsfunktionalen Konditional der WFL ist, dass aber viele deutsche Konditionale mit '$\rightarrow$' nicht angemessen symbolisiert werden können. Dies illustriert, dass WFL eine an sich begrenzte Sprache ist.

KAPITEL 11

Komplette Wahrheitstabellen

Bisher haben wir Symbolisierungsschlüssel verwendet, um den Sätzen der WFL Wahrheitswerte *indirekt* zuzuordnen. Wir könnten beispielsweise sagen, dass der WFL-Satz 'B' den Satz 'Big Ben ist in London' symbolisiert. Da Big Ben in London ist, würde diese Symbolisierung 'B' wahr machen. Wir können aber auch *direkt* Wahrheitswerte zuweisen. Wir können einfach festlegen, dass "B"wahr ist, oder festlegen, dass es falsch ist. Solche Bestimmungen werden *Bewertungen* genannt:

> Eine BEWERTUNG ist eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu bestimmten Satzbuchstaben der WFL.

Das Potential der Wahrheitstabellen liegt im Folgenden. Jede Zeile einer Wahrheitstabelle stellt eine mögliche Bewertung der Satzbuchstaben dar. Die komplette Wahrheitstabelle stellt alle möglichen Bewertungen der Satzbuchstaben dar. Eine solche Wahrheitstabelle gibt uns ein Mittel an die Hand, mit dem wir den Wahrheitswert von komplexen Sätzen für jede mögliche Bewertung berechnen können. All dies lässt sich am einfachsten an einem Beispiel erklären.

11.1 Ein Beispiel

Betrachten Sie den Satz ‘$(H \wedge I) \rightarrow H$’. Es gibt vier Möglichkeiten, den Satzbuchstaben ‘H’ und ‘I’ Wahr und Falsch zuzuordnen – vier Bewertungen. Die können wir wie folgt darstellen:

H	I	$(H \wedge I) \rightarrow H$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

Um den Wahrheitswert des gesamten Satzes ‘$(H \wedge I) \rightarrow H$’ zu berechnen, kopieren wir zunächst die Wahrheitswerte für die Satzbuchstaben und schreiben sie unter die Buchstaben in der Wahrheitstabelle:

H	I	$(H$	$\wedge\, I)$	$\rightarrow H$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	T
F	T	F	T	F
F	F	F	F	F

Betrachten Sie nun den Teilsatz ‘$(H \wedge I)$’. Dieser ist eine Konjunktion, $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$, mit ‘$H$’ als $\mathscr{A}$ und ‘I’ als $\mathscr{B}$. Die charakteristische Wahrheitstabelle für die Konjunktion gibt die Wahrheitsbedingungen für *jeden* Satz der Form $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ an, was auch immer an $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$s Stelle vorkommen mag. Er stellt den Punkt dar, dass eine Konjunktion wahr ist wenn und nur wenn beide Konjunkte wahr sind. In diesem Fall sind unsere Konjunkte ‘H’ und ‘I’. Sie sind beide wahr in (und nur in) der ersten Zeile der Wahrheitstabelle. Dementsprechend können wir den Wahrheitswert der Konjunktion auf allen vier Zeilen berechnen.

H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\rightarrow$	H
		$\mathscr{A}$	$\wedge$	$\mathscr{B}$		
T	T	T	T	T		T
T	F	T	F	F		T
F	T	F	F	T		F
F	F	F	F	F		F

Nun ist der ganze Satz, mit dem wir es zu tun haben, ein Konditional, $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$, mit '$(H \wedge I)$' als $\mathscr{A}$ und 'H' als $\mathscr{B}$. In der zweiten Reihe zum Beispiel ist '$(H \wedge I)$' falsch und 'H' wahr. Da ein Konditional wahr ist, wenn das Antezedens falsch ist, schreiben wir ein 'T' in die zweite Zeile unter das Symbol des Konditionals. Mit den anderen drei Zeilen fortfahrend erhalten wir:

H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\rightarrow$	H
			$\mathscr{A}$		$\rightarrow$	$\mathscr{B}$
T	T		T		T	T
T	F		F		T	T
F	T		F		T	F
F	F		F		T	F

Der Konditional ist der Hauptjunktor des Satzes. Daher sagt uns die Spalte der 'T's unter dem Konditional, dass der Satz '$(H \wedge I) \rightarrow H$' unabhängig von den Wahrheitswerten von 'H' und 'I' wahr ist. Sie können in jeder Kombination wahr oder falsch sein–der komplexe Satz ist immer wahr. Da wir alle vier möglichen Zuordnungen von Wahrheit und Falschheit zu 'H' und 'I' in Betracht gezogen haben – alle möglichen Bewertungen –, können wir sagen, dass '$(H \wedge I) \rightarrow H$' jeder Bewertung nach wahr ist.

In diesem Beispiel haben wir nicht alle Einträge in jeder Spalte in jeder aufeinander folgenden Tabelle wiederholt. Beim manuellen Schreiben von Wahrheitstabellen auf Papier ist es jedoch unpraktisch, ganze Spalten zu löschen oder die ganze Tabelle bei jedem Schritt neu zu schreiben. Auch wenn die Wahrheitstabelle so voller ist, kann sie auch auf diese Weise geschrieben werden:

H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\rightarrow$	H
T	T	T	T	T	**T**	T
T	F	T	F	F	**T**	T
F	T	F	F	T	**T**	F
F	F	F	F	F	**T**	F

Die meisten Spalten unterhalb des Satzes dienen unserem Komfort. Die Spalte, auf die es ankommt, ist die Spalte unter dem *Haupjunktor* für den Satz, da diese den Wahrheitswert des gesamten Satzes angibt. Wir haben dies betont, indem wir diese Spalte fett gedruckt haben. Wenn Sie selbst Wahrheitstabellen schreiben, sollten Sie diese Spalte in ähnlicher Weise hervorheben.

11.2 Komplette Wahrheitstabellen bauen

Eine KOMPLETTE WAHRHEITSTABELLE hat eine Zeile für jede mögliche Zuordnung von Wahr und Falsch zu den relevanten Satzbuchstaben. Jede Zeile repräsentiert eine *Bewertung* und eine komplette Wahrheitstabelle hat eine Zeile für jede mögliche Bewertung.

Die Größe der kompletten Wahrheitstabelle hängt von der Anzahl der verschiedenen Satzbuchstaben in der Tabelle ab. Ein Satz, der nur einen Satzbuchstaben enthält, benötigt nur zwei Zeilen, wie in der charakteristischen Wahrheitstabelle für die Negation. Dies gilt auch dann, wenn derselbe Buchstabe viele Male wiederholt wird, wie im Satz '$[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow C)$'. Die komplette Wahrheitstabelle umfasst hier nur zwei Zeilen, weil es nur zwei Möglichkeiten gibt: 'C' kann wahr oder falsch sein. Die Wahrheitstabelle für diesen Satz sieht wie folgt aus:

C	$[(C$	$\leftrightarrow$	$C)$	$\rightarrow$	$C]$	$\wedge$	$\neg$	$(C$	$\rightarrow$	$C)$
T	T	T	T	T	T	**F**	F	T	T	T
F	F	T	F	F	F	**F**	F	F	T	F

Wenn wir uns die Spalte unter dem Hauptjunktor ansehen, dann sehen wir, dass dieser Satz in beiden Zeilen der Tabelle falsch ist. D.h., dass der Satz falsch ist, unabhängig davon, ob 'C' wahr oder falsch ist. Er ist jeder Bewertung nach falsch.

Eine komplette Wahrheitstabelle für einen Satz mit zwei unterschiedlichen Satzbuchstaben hat vier Zeilen, wie die charakteristischen Wahrheitstabellen für Konjunktion, Disjunktion, den Konditional und den Bikonditional oder auch die Wahrheitstabelle für '$(H \wedge I) \rightarrow H$'.

Eine komplette Wahrheitstabelle für einen Satz mit drei unterschiedlichen Satzbuchstaben hat acht Zeilen, z.B.:

M	N	P	M	$\wedge$	$(N$	$\vee$	$P)$
T	T	T	T	**T**	T	T	T
T	T	F	T	**T**	T	T	F
T	F	T	T	**T**	F	T	T
T	F	F	T	**F**	F	F	F
F	T	T	F	**F**	T	T	T
F	T	F	F	**F**	T	T	F
F	F	T	F	**F**	F	T	T
F	F	F	F	**F**	F	F	F

Aus dieser Tabelle wissen wir, dass der Satz '$M \wedge (N \vee P)$' wahr oder falsch sein kann, abhängig von den Wahrheitswerten von 'M', 'N' und 'P'.

Eine komplette Wahrheitstabelle für einen Satz, der vier verschiedene Satzbuchstaben enthält, erfordert 16 Zeilen. Fünf Buchstaben, 32 Zeilen. Sechs Buchstaben, 64 Zeilen. Und so weiter. Um ganz allgemein zu sein: Wenn eine komplette Wahrheitstabelle n verschiedene Satzbuchstaben enthält, dann muss sie 2^n Zeilen haben.

Um die Spalten einer vollständigen Wahrheitstabelle auszufüllen, beginnen Sie mit dem am weitesten rechts stehenden Satzbuchstaben und wechseln zwischen 'T' und 'F'. In die nächste Spalte links schreiben Sie zwei 'T', zwei 'F' und wiederholen das Ganze so oft wie notwendig um alle Zeilen auszufüllen. Für den dritten Satzbuchstaben schreiben Sie vier 'T', gefolgt von vier 'F' und wiederholen das Ganze so oft wie notwendig. Bei einer 16-zeiligen Wahrheitstabelle sollte die nächste Spalte der Satzbuchstaben acht ‘T’ gefolgt von acht ‘F’ enthalten (auch hier wiederholen Sie das Ganze so oft wie notwendig). Bei einer 32-zeiligen Tabelle hat dann die nächste Spalte 16 ‘T’ gefolgt von 16 ‘F’. Und so weiter.

11.3 Mehr zu Klammern

Betrachten Sie die folgenden zwei Konjunktionen:

$$((A \wedge B) \wedge C)$$
$$(A \wedge (B \wedge C))$$

Diese sind wahrheitsfunktional äquivalent. D.h., dass es aus der Perspektive des Wahrheitswerts – und das ist alles, worum sich die WFL kümmert (siehe §10)– niemals einen Unterschied machen wird, welchen der beiden Sätze wir behaupten (oder verneinen). Auch wenn die Reihenfolge der Klammern hinsichtlich des Wahrheitswerts der zwei Sätze keine Rolle spielt, sollten wir sie nicht einfach fallen lassen. Der Ausdruck

$$A \wedge B \wedge C$$

ist mehrdeutig zwischen den zwei obengenannten Sätzen. Das Gleiche gilt auch für Disjunktionen. Die folgenden zwei Sätze sind wahrheitsfunktional äquivalent:

$$((A \vee B) \vee C)$$
$$(A \vee (B \vee C))$$

Aber d.h. nicht, dass wir einfach das Schreiben können:

$$A \vee B \vee C$$

Es ist eine spezifische Tatsache über die charakteristischen Wahrheitstabellen von $\vee$ und $\wedge$, die garantiert, dass zwei beliebige Konjunktionen (oder Disjunktionen) derselben Sätze wahrheitsfunktional äquivalent sind, wo auch immer man die Klammern platziert. *Dies gilt jedoch nur für Konjunktionen und Disjunktionen.* Die folgenden zwei Sätze haben *verschiedene* Wahrheitstabellen:

$$((A \to B) \to C)$$
$$(A \to (B \to C))$$

Falls wir also das hier schreiben würden

$$A \to B \to C$$

wäre unser Satz mehrdeutig zwischen Sätzen mit verschiedenen Wahrheitstabellen. Das Weglassen von Klammern wäre in diesem Fall also katastrophal. Ebenso haben diese Sätze unterschiedliche Wahrheitstabellen:

$$((A \vee B) \wedge C)$$
$$(A \vee (B \wedge C))$$

Falls wir also das hier schreiben würden

$$A \vee B \wedge C$$

wäre unser Satz wiederum mehrdeutig zwischen Sätzen mit verschiedenen Wahrheitstabellen. *Schreiben Sie darum nie solche Sätze nieder.* Das Prinzip dahinter lautet: lassen Sie nie Klammern aus (außer die Äußersten).

Übungen

A. Schreiben Sie komplette Wahrheitstabellen für jeden der folgenden Sätze:

1. $A \to A$
2. $C \to \neg C$
3. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow \neg B)$
4. $(A \to B) \vee (B \to A)$

5. $(A \land B) \to (B \lor A)$
6. $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$
7. $\big[(A \land B) \land \neg(A \land B)\big] \land C$
8. $[(A \land B) \land C] \to B$
9. $\neg\big[(C \lor A) \lor B\big]$

B. Prüfen Sie alle Behauptungen, die bei der Einführung unserer erweiterten Klammernkonventionen (§11.3) gemacht wurden. Zeigen Sie also, dass:

1. '$((A \land B) \land C)$' und '$(A \land (B \land C))$' die gleiche Wahrheitstabelle haben
2. '$((A \lor B) \lor C)$' und '$(A \lor (B \lor C))$' die gleiche Wahrheitstabelle haben
3. '$((A \lor B) \land C)$' und '$(A \lor (B \land C))$' nicht die gleiche Wahrheitstabelle haben
4. '$((A \to B) \to C)$' und '$(A \to (B \to C))$' nicht die gleiche Wahrheitstabelle haben

Prüfen Sie außerdem, dass:

5. '$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$' und '$(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$' die gleiche Wahrheitstabelle haben

C. Erstellen Sie komplette Wahrheitstabellen für die folgenden Sätze und markieren Sie die Spalte, die die möglichen Wahrheitswerte für den ganzen Satz darstellt.

1. $\neg(S \leftrightarrow (P \to S))$
2. $\neg[(X \land Y) \lor (X \lor Y)]$
3. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \leftrightarrow \neg A)$
4. $[C \leftrightarrow (D \lor E)] \land \neg C$
5. $\neg(G \land (B \land H)) \leftrightarrow (G \lor (B \lor H))$

D. Erstellen Sie komplette Wahrheitstabellen für die folgenden Sätze und markieren Sie die Spalte, die die möglichen Wahrheitswerte für den ganzen Satz darstellt.

1. $(D \wedge \neg D) \rightarrow G$
2. $(\neg P \vee \neg M) \leftrightarrow M$
3. $\neg\neg(\neg A \wedge \neg B)$
4. $[(D \wedge R) \rightarrow I] \rightarrow \neg(D \vee R)$
5. $\neg[(D \leftrightarrow O) \leftrightarrow A] \rightarrow (\neg D \wedge O)$

Wenn Sie noch mehr üben wollen, können Sie Wahrheitstabellen für jeden der Sätze und jedes der Argumente aus den Übungen des vorigen Kapitels erstellen.

KAPITEL 12

Semantische Begriffe

Im vorigen Kapitel haben wir den Begriff einer Bewertung eingeführt und gezeigt, wie man den Wahrheitswert jedes WFL-Satzes jeder Bewertung nach mit Hilfe einer Wahrheitstabelle ermitteln kann. In diesem Abschnitt stellen wir einige verwandte Begriffe vor und zeigen, wie Wahrheitstabellen verwendet werden können, um zu testen, ob sie zutreffen oder nicht.

12.1 Tautologien und Widersprüche

In §3 haben wir die Begriffe der *notwendigen Wahrheit* und *notwendigen Falschheit* erklärt. Beide Begriffe haben nahe Verwandte in der WFL. Hier ist ein Begriff, der der notwendigen Wahrheit verwandt ist:

> $\mathscr{A}$ ist eine TAUTOLOGIE genau dann, wenn es jeder Bewertung nach wahr ist.

Um zu entscheiden, ob ein Satz eine Tautologie ist, können wir Wahrheitstabellen verwenden. Wenn der Satz in jeder Zeile seiner kompletten Wahrheitstabelle wahr ist, dann ist er in jeder Bewertung wahr und es handelt sich um eine Tautologie. Um ein bekanntes Beispiel zu nutzen: ‘$(H \land I) \to H$’ ist eine Tautologie.

Der Begriff der Tautologie ist mit dem der notwendigen Wahrheit nur verwandt; sie sind verschiedene Begriffe. Denn es gibt einige notwendigen Wahrheiten, die wir in der WFL nicht angemessen symbolisieren können. Ein Beispiel ist 'Ein Stein ist ein Stein'. Dieser Satz ist notwendigerweise wahr, aber wenn wir versuchen, ihn in WFL zu symbolisieren, dann können wir ihn nur als einen Satzbuchstaben symbolisieren. Aber kein Satzbuchstabe ist eine Tautologie. Es ist also nicht der Fall, dass jede notwendige Wahrheit eine Tautologie ist. Wenn wir jedoch einen deutschen Satz mit einem WFL-Satz, der eine Tautologie ist, angemessen symbolisieren können, dann drückt dieser deutsche Satz eine notwendige Wahrheit aus. Es ist also sehr wohl der Fall, dass jede Tautologie eine notwendige Wahrheit ist.

Der Begriff der notwendigen Falschheit hat einen ähnlichen Verwandten:

> $\mathscr{A}$ ist ein WIDERSPRUCH (in der WFL) genau dann, wenn es jeder Bewertung nach falsch ist.

Wir können Wahrheitstabellen verwenden, um zu entscheiden, ob ein Satz ein Widerspruch ist. Wenn der Satz in jeder Zeile seiner kompletten Wahrheitstabelle falsch ist, dann ist er bei jeder Bewertung falsch und ist ein Widerspruch. Um ein bekanntes Beispiel zu nutzen: '$[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow C)$' ist ein Widerspruch.

Ähnlich wie zuvor gilt: der Begriff des Widerspruchs ist nur mit dem der notwendigen Falschheit verwandt. Es gibt einige notwendige Falschheiten, die keine Widersprüche sind, zum Beispiel 'Ein Stein ist kein Stein.' Umgekehrt gilt jedoch (zumindest für viele Philosoph*innen), dass jeder Widerspruch eine notwendige Falschheit ist.

12.2 Äquivalenz

Ein weitere nützlicher Begriff ist der Begriff der *Äquivalenz*:

> $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ sind ÄQUIVALENT (in der WFL) genau dann, wenn sie jeder Bewertung nach den gleichen Wahrheitswert haben, d.h., wenn es keine Bewertung gibt, laut der sie unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

Wir nutzten diesen Begriff bereits in §11.3; dort stellten wir fest, dass '$(A \wedge B) \wedge C$' und '$A \wedge (B \wedge C)$' äquivalent sind. Auch die Äquivalenz zweier Sätze können wir mittels Wahrheitstabellen überprüfen. Betrachten Sie die Sätze '$\neg(P \vee Q)$' und '$\neg P \wedge \neg Q$'. Sind sie äquivalent? Um das herauszufinden, konstruieren wir eine Wahrheitstabelle.

P	Q	$\neg\,(P \vee Q)$	$\neg\, P \wedge \neg\, Q$
T	T	**F** T T T	F T **F** F T
T	F	**F** T T F	F T **F** T F
F	T	**F** F T T	T F **F** F T
F	F	**T** F F F	T F **T** T F

Sehen Sie sich die Spalten für die Hauptjunktoren an; Negation für den ersten Satz, Konjunktion für den zweiten. In den ersten drei Zeilen sind beide falsch. In der letzten Zeile sind beide wahr. Da sie in jeder Zeile übereinstimmen, sind die beiden Sätze äquivalent.

12.3 Konsistenz

In §3 erklärten wir, dass Sätze *gemeinsam möglich* sind genau dann, wenn es zumindest einen Fall gibt, in dem sie alle wahr sind. Auch hierzu gibt es wieder einen verwandten Begriff:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ sind KONSISTENT (in der WFL) genau dann, wenn es zumindest eine Bewertung gibt, nach der sie alle wahr sind.

Folglich nennen wir Sätze INKONSISTENT genau dann, wenn es keine Bewertung gibt, die all diese Sätze wahr macht. Offensichtlich können wir mittels Wahrheitstabellen überprüfen, ob Sätze konsistent oder inkonsistent sind.

12.4 Folgebeziehung und Gültigkeit

Wir können auch die Folgebeziehung und Gültigkeit mittels Wahrheitstabellen definieren:

> Die Sätze $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ **haben** den Satz $\mathscr{C}$ **zur Folge** genau dann, wenn es keine Bewertung gibt, laut der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ alle wahr sind, aber $\mathscr{C}$ falsch.

Um zu überprüfen, ob '$\neg L \to (J \vee L)$' und '$\neg L$', 'J' zur Folge haben, schauen wir, ob es eine Bewertung gibt, die sowohl '$\neg L \to (J \vee L)$' als auch '$\neg L$' wahr, aber 'J' falsch, macht. Hierzu verwenden wir eine Wahrheitstabelle:

J	L	$\neg L \to (J \vee L)$	$\neg L$	J
T	T	F T **T** T T T	**F** T	**T**
T	F	T F **T** T T F	**T** F	**T**
F	T	F T **T** F T T	**F** T	**F**
F	F	T F **F** F F F	**T** F	**F**

Die einzige Zeile, in der sowohl '$\neg L \to (J \vee L)$' als auch '$\neg L$' wahr sind, ist die zweite Zeile. In dieser Zeile ist auch 'J' wahr. Daher haben '$\neg L \to (J \vee L)$' und '$\neg L$', 'J' zur Folge.

An dieser Stelle sollten wir etwas Wesentliches festhalten.

> Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ in der WFL $\mathscr{C}$ zur Folge haben, dann ist $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ ein gültiges Argument.

Der Grund dafür lautet wie folgt: Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ in der WFL $\mathscr{C}$ zur Folge haben, dann gibt es keine Bewertung, die $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ alle wahr, aber $\mathscr{C}$ falsch, macht. Aber jedem Fall, in dem $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ alle wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch, würde eine Bewertung entsprechen, die $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ alle wahr, aber $\mathscr{C}$ falsch macht. Weil es keine solche Bwertung gibt, wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$

in der WFL $\mathscr{C}$ zur Folge haben, folgt nun aber, dass wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ in der WFL $\mathscr{C}$ zur Folge haben, auch das Argument mit Prämissen $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ und Schlussfolgerung $\mathscr{C}$ gültig ist.

Kurz gesagt, die WFL gibt uns eine Möglichkeit, die Gültigkeit deutscher Argumente zu testen. Zuerst symbolisieren wir sie in der WFL; dann überprüfen wir mit Hilfe von Wahrheitstabellen, ob die Prämissen der Argumente, ihre Schlussfolgerungen zur Folge haben.

12.5 Einschränkungen dieser Tests

Dies ist ein wichtiger Meilenstein: wir haben einen Test für die Gültigkeit von Argumenten! Aber wir sollten uns davon nicht zu sehr beeindrucken lassen. Es ist wichtig, die Einschränkungen dieses Resultats zu verstehen. Wir werden diese Einschränkungen an drei Beispielen veranschaulichen.

Erstens:

1. Daisy hat vier Beine. Also hat Daisy mehr als zwei Beine.

Um dieses Argument in der WFL zu symbolisieren, müssten wir zwei verschiedene Satzbuchstaben – etwa 'V' und 'Z' – für die Prämisse und die Schlussfolgerung verwenden. Aber es ist offensichtlich, dass 'V' 'Z' nicht zur Folge hat. Es gibt eine Bewertung, nach der 'V' wahr ist, während 'Z' falsch ist. Und das ist so, obwohl das deutsche Argument klarerweise gültig ist.

Zweitens:

2. Jan ist weder glatzig noch nicht-glatzig.

Um diesen Satz in der WFL zu symbolisieren, könnten wir '$\neg J \wedge \neg\neg J$' nutzen. Dieser Satz ist ein Widerspruch (überprüfen Sie dies mit einer Wahrheitstabelle), aber der Satz 2 selbst scheint kein Widerspruch zu sein. Denn es könnte ja sein, dass Jan ein Grenzfall ist und es nicht klar ist, ob er glatzig ist oder nicht.

Drittens:

3. Es ist nicht der Fall, dass Gott auf bösartige Gebete antwortet, wenn Er/Sie existiert.

Um diesen Satz in der WFL zu symbolisieren, könnten wir '$\neg(G \to M)$' nutzen. '$\neg(G \to M)$' hat aber nun 'G' zur Folge (überprüfen Sie dies mit einer Wahrheitstabelle). Wenn wir also den Satz 3 in der WFL symbolisieren, scheint er zur Folge zu haben, dass Gott existiert. Aber das ist merkwürdig: Selbst eine Atheistin kann den Satz 3 akzeptieren, ohne sich selbst zu widersprechen!

Eine Lehre hier ist, dass die Symbolisierung von 3 als '$\neg(G \to M)$' zeigt, dass 3 nicht das ausdrückt, was wir beabsichtigen. Vielleicht sollten wir den Satz wie folgt umformulieren:

3. Wenn Gott existiert, dann antwortet Er/Sie nicht auf bösartige Gebete.

Dann können wir 3 als '$G \to \neg M$' symbolisieren. Wenn Atheist*innen nun Recht haben und es keinen Gott gibt, dann ist 'G' falsch und '$G \to \neg M$' wahr. Das Puzzle löst sich damit in Luft auf. Aber wenn 'G' falsch ist, dann ist '$G \to M$', 'Wenn Gott existiert, dann antwortet Er/Sie auf bösartige Gebete' ebenso wahr!

Auf unterschiedliche Weise zeigen diese vier Beispiele einige der Einschränkungen einer Sprache (wie WFL) auf, die nur wahrheitsfunktionale Junktoren nutzt. Diese Einschränkungen werfen einige interessante Fragen in der philosophischen Logik auf. Der Fall von Jans Glatzigkeit wirft die allgemeine Frage auf, welche Logik wir anwenden sollten, wenn wir uns mit vagen Sätzen beschäftigen. Der Fall der Atheistin wirft die Frage auf, wie wir mit den (so genannten) *Paradoxien des materiellen Konditionals* umgehen sollen. Dieser Kurs ist gedacht, Sie mit Werkzeugen auszustatten, um diese Fragen der philosophischen Logik zu erforschen. Aber wir müssen lernen zu gehen, bevor wir zu laufen lernen; wir müssen die WFL beherrschen, bevor wir ihre Grenzen angemessen diskutieren und Alternativen erwägen können.

12.6 Das doppelte Drehkreuz

Im Folgenden werden wir den Begriff der Folgebeziehung häufig verwenden. Daher lasst uns nun ein Symbol einführen, das ihn abkürzt. Anstatt zu sagen, dass die WFL-Sätze $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …und $\mathscr{A}_n$, $\mathscr{C}$ zur Folge haben, können wir die folgende Abkürzung verwenden:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$$

Das Symbol'$\vDash$' nennen wir *das doppelte Drehkreuz*, weil es so aussieht wie ein Drehkreuz mit zwei horizontalen Balken.

'$\vDash$' ist kein Symbol der WFL. Es ist ein Symbol unserer Metasprache, dem erweiterten Deutsch (erinnern Sie sich an den Unterschied zwischen Objektsprache und Metasprache in §8). Also ist der folgende Satz in der Metasprache:

- $P, P \to Q \vDash Q$

nur eine Abkürzung für diesen Satz unserer Metasprache:

- Die WFL-Sätze 'P' und '$P \to Q$' haben 'Q' zur Folge.

Beachten Sie, dass es keine Grenze der Anzahl der WFL-Sätze gibt, die vor dem Symbol '$\vDash$' erwähnt werden können. Wir können sogar den Grenzfall in Betracht ziehen:

$$\vDash \mathscr{C}$$

Dies besagt, dass es keine Bewertung gibt, die alle Sätze, die auf der linken Seite von '$\vDash$' erwähnt werden, wahr und $\mathscr{C}$ falsch macht. Da hier auf der linken Seite von '$\vDash$' keine Sätze erwähnt werden, bedeutet dies, dass es keine Bewertung gibt, die $\mathscr{C}$ falsch macht. Anders ausgedrückt heißt das, dass jede Bewertung $\mathscr{C}$ wahr macht. $\mathscr{C}$ ist also eine Tautologie.

Auf ähnliche Art können wir aussagen, dass $\mathscr{A}$ ein Widerspruch ist:

$$\mathscr{A} \vDash$$

Denn dies besagt, dass keine Bewertung $\mathscr{A}$ wahr macht.

Manchmal wollen wir verneinen, dass eine Folgebeziehung besteht. Das können wir so tun:

$$\text{Es ist nicht der Fall, dass } \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$$

Um dies abzukürzen, können wir einfach das doppelte Drehkreuz durchstreichen:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \nvDash \mathscr{C}$$

Dies bedeutet, dass *zumindest eine* Bewertung $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ wahr und $\mathscr{C}$ falsch macht. (Beachten Sie, dass hieraus nicht folgt, dass $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \neg \mathscr{C}$. Denn das würde bedeuten, dass *jede* Bewertung $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ wahr und $\mathscr{C}$ falsch macht).

12.7 '$\vDash$' und '$\rightarrow$'

Lasst uns nun '$\vDash$' und '$\rightarrow$' gegenüberstellen.

Es gilt: $\mathscr{A} \vDash \mathscr{C}$ genau dann, wenn keine Bewertung $\mathscr{A}$ wahr und $\mathscr{C}$ falsch macht.

Es gilt auch: $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ ist eine Tautologie genau dann, wenn keine Bewertung $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ falsch macht. Weil ein Konditional wahr ist, es sei denn sein Antezedens ist wahr und sein Konsequens ist falsch, gilt: $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ ist eine Tautologie genau dann, wenn keine Bewertung $\mathscr{A}$ wahr und $\mathscr{C}$ falsch macht.

Wenn wir diese zwei Punkte zusammenfassen, sehen wir, dass $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ eine Tautologie ist genau dann, wenn $\mathscr{A} \vDash \mathscr{C}$. Aber es gibt einen sehr wichtigen Unterschied zwischen '$\vDash$' und '$\rightarrow$':

> '$\rightarrow$' ist ein Junktor der WFL.
> '$\vDash$' ist ein Symbol des erweiterten Deutschen.

Wenn '$\rightarrow$' von zwei WFL-Sätzen flankiert wird, dann ist das Ergebnis ein komplexerer WFL-Satz. Wenn wir dagegen '$\vDash$' verwenden, bilden wir einen metasprachlichen Satz, der die umgebenden WFL-Sätze *erwähnt*.

Übungen

A. Gehen Sie Ihre Antworten zu §11**A** noch einmal durch. Bestimmen Sie, welche Sätze Tautologien sind, welche Widersprüche und welche weder Tautologien noch Widersprüche.

B. Bestimmen Sie anhand von Wahrheitstabellen, ob die folgenden Satzmengen konsistent oder inkonsistent sind.

1. $A \rightarrow A, \neg A \rightarrow \neg A, A \wedge A, A \vee A$
2. $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$
3. $B \wedge (C \vee A), A \rightarrow B, \neg(B \vee C)$
4. $A \leftrightarrow (B \vee C), C \rightarrow \neg A, A \rightarrow \neg B$

C. Verwenden Sie Wahrheitstabellen, um festzustellen, ob die folgenden Argumente gültig oder ungültig sind.

1. $A \rightarrow A \therefore A$
2. $A \rightarrow (A \wedge \neg A) \therefore \neg A$
3. $A \vee (B \rightarrow A) \therefore \neg A \rightarrow \neg B$
4. $A \vee B, B \vee C, \neg A \therefore B \wedge C$
5. $(B \wedge A) \rightarrow C, (C \wedge A) \rightarrow B \therefore (C \wedge B) \rightarrow A$

D. Bestimmen Sie anhand einer kompletten Wahrheitstabelle, ob es sich bei den folgenden Sätzen um Tautologien, Widersprüche oder kontingente Sätze handelt.

1. $\neg B \wedge B$
2. $\neg D \vee D$
3. $(A \wedge B) \vee (B \wedge A)$
4. $\neg[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$
5. $A \leftrightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$
6. $[(A \wedge B) \leftrightarrow B] \rightarrow (A \rightarrow B)$

E. Bestimmen Sie anhand kompletter Wahrheitstabellen, ob die folgenden Satzpaare äquivalent sind. Wenn sie es sind, schreiben Sie “äquivalent”; andernfalls “nicht äquivalent”.

1. A und $\neg A$
2. $A \wedge \neg A$ und $\neg B \leftrightarrow B$
3. $[(A \vee B) \vee C]$ und $[A \vee (B \vee C)]$
4. $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. $[A \wedge (A \vee B)] \rightarrow B$ und $A \rightarrow B$

F. Bestimmen Sie anhand kompletter Wahrheitstabellen, ob die folgenden Satzpaare äquivalent sind. Wenn sie es sind, schreiben Sie "äquivalent"; andernfalls "nicht äquivalent".

1. $A \rightarrow A$ und $A \leftrightarrow A$
2. $\neg(A \rightarrow B)$ und $\neg A \rightarrow \neg B$
3. $A \vee B$ und $\neg A \rightarrow B$
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ und $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
5. $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ und $A \wedge (B \wedge C)$

G. Bestimmen Sie anhand kompletter Wahrheitstabellen, ob die folgenden Satzmengen konsistent oder inkonsistent sind.

1. $A \wedge \neg B$, $\neg(A \rightarrow B)$, $B \rightarrow A$
2. $A \vee B$, $A \rightarrow \neg A$, $B \rightarrow \neg B$
3. $\neg(\neg A \vee B)$, $A \rightarrow \neg C$, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
4. $A \rightarrow B$, $A \wedge \neg B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(A \rightarrow B) \rightarrow C$, $A \rightarrow C$

H. Bestimmen Sie anhand kompletter Wahrheitstabellen, ob die folgenden Satzmengen konsistent oder inkonsistent sind.

1. $\neg B$, $A \rightarrow B$, A
2. $\neg(A \vee B)$, $A \leftrightarrow B$, $B \rightarrow A$
3. $A \vee B$, $\neg B$, $\neg B \rightarrow \neg A$
4. $A \leftrightarrow B$, $\neg B \vee \neg A$, $A \rightarrow B$
5. $(A \vee B) \vee C$, $\neg A \vee \neg B$, $\neg C \vee \neg B$

I. Bestimmen Sie anhand kompletter Wahrheitstabellen, ob die folgenden Argumente gültig sind.

1. $A \rightarrow B, B \therefore A$
2. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$
3. $A \rightarrow B, A \rightarrow C \therefore B \rightarrow C$
4. $A \rightarrow B, B \rightarrow A \therefore A \leftrightarrow B$

J. Bestimmen Sie anhand kompletter Wahrheitstabellen, ob die folgenden Argumente gültig sind.

1. $A \vee [A \rightarrow (A \leftrightarrow A)] \therefore A$
2. $A \vee B, B \vee C, \neg B \therefore A \wedge C$
3. $A \rightarrow B, \neg A \therefore \neg B$
4. $A, B \therefore \neg(A \rightarrow \neg B)$
5. $\neg(A \wedge B), A \vee B, A \leftrightarrow B \therefore C$

K. Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

1. Nehmen Sie an, dass $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ äquivalent sind. Was können Sie über $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ sagen?
2. Nehmen Sie an, dass $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \rightarrow \mathscr{C}$ weder eine Tautologie noch ein Widerspruch ist. Was können Sie zur Frage, ob $\mathscr{A}, \mathscr{B} \therefore \mathscr{C}$ gültig ist, sagen?
3. Nehmen Sie an, dass $\mathscr{A}$ ein Widerspruch ist. Was können Sie zur Frage, ob $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vDash \mathscr{C}$, sagen?
4. Nehmen Sie an, dass $\mathscr{C}$ eine Tautologie ist. Was können Sie zur Frage, ob $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vDash \mathscr{C}$, sagen?
5. Nehmen Sie an, dass $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ äquivalent sind. Was können Sie über $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ sagen?
6. Nehmen Sie an, dass $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ *nicht* äquivalent sind. Was können Sie über $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ sagen?

L. Betrachten Sie das folgende Prinzip:

- Nehmen Sie an, dass $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ äquivalent sind. Nehmen Sie an, ein Argument enthält $\mathscr{A}$ (entweder als Prämisse oder als Schlussfolgerung). Die Gültigkeit dieses Argument wäre unverändert wenn wir $\mathscr{A}$ mit $\mathscr{B}$ ersetzen würden.

Ist dieses Prinzip korrekt? Erklären Sie Ihre Antwort.

KAPITEL 13

Abkürzungen für Wahrheitstabellen

Mit etwas Übung werden Sie beim Ausfüllen von Wahrheitstabellen schnell zum Profi. In diesem Abschnitt betrachten (und begründen) wir einige Abkürzungen, die Ihnen dabei helfen können.

Sie werden schnell feststellen, dass Sie nicht den Wahrheitswert jedes einzelnen Satzbuchstabens kopieren müssen, sondern einfach auf diese zurückverweisen können. So können Sie die Dinge beschleunigen, indem sie Dinge wie folgt aufschreiben:

P	Q	$(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P$
T	T	T **F** F
T	F	T **F** F
F	T	T **T** T
F	F	F **F** T

Sie wissen auch, dass eine Disjunktion notwendigerweise wahr ist, wenn eines der Disjunkte wahr ist. Wenn Sie also ein wahres Disjunkt finden, müssen Sie den Wahrheitswert des anderen Disjunkts nicht erarbeiten. Zum Beispiel:

P	Q	$(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg P$
T	T	F F F **F** F
T	F	F T T **T** F
F	T	**T** T
F	F	**T** T

Ebenso wissen Sie, dass eine Konjunktion notwendigerweise falsch ist, wenn einer der Konjunkte falsch ist. Wenn Sie also einen falschen Konjunkt finden, müssen Sie den Wahrheitswert des anderen Konjunkts nicht erarbeiten. Zum Beispiel:

P	Q	$\neg$	$(P$	$\wedge$	$\neg$	$Q)$	$\wedge$	$\neg$	P
T	T						**F**	F	
T	F						**F**	F	
F	T	T		F			**T**	T	
F	F	T		F			**T**	T	

Eine ähnliche Abkürzung gibt es auch für Konditionale. Wir wissen, dass ein Konditional wahr ist, wenn entweder sein Konsequens wahr oder sein Antezedens falsch ist. Also können Sie wie folgt verfahren:

P	Q	$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\rightarrow$	$P)$	$\rightarrow$	P
T	T						**T**	
T	F						**T**	
F	T		T		F		**T**	
F	F		T		F		**T**	

Es folgt hieraus, dass ‘$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$’ eine Tautologie ist. Tatsächlich ist es ein Beispiel von *Peirce’s Law*, benannt nach Charles Sanders Peirce.

13.1 Auf Gültigkeit testen

In §12 haben wir gesehen, wie man Wahrheitstabellen verwendet, um für Gültigkeit zu testen. Wir testen auf *schlechte* Zeilen: Zeilen, in denen die Prämissen alle wahr sind und die Schlussfolgerung falsch. Nun:

- Wenn die Schlussfolgerung in einer Zeile wahr ist, dann ist diese Zeile nicht schlecht und wir müssen nichts anderes in dieser Zeile ausfüllen, um dies zu wissen.

- Wenn eine Prämisse in einer Zeile falsch ist, dann ist diese Zeile nicht schlecht und wir müssen nichts anderes in dieser Zeile ausfüllen, um dies zu wissen

Vor diesem Hintergrund können wir unsere Tests erheblich beschleunigen. Lassen Sie uns überlegen, wie wir Folgendes testen könnten:

$$\neg L \rightarrow (J \vee L), \neg L \therefore J$$

Das *erste*, was wir tun sollten, ist, die Schlussfolgerung zu bewerten. Wenn wir feststellen, dass die Schlussfolgerung auf einer Zeile *wahr* ist, dann ist das keine schlechte Zeile. Wir können also den Rest der Zeile einfach ignorieren. Nach unserer ersten Phase bleibt uns also so etwas wie das hier:

J	L	$\neg L \rightarrow (J \vee L)$	$\neg L$	J
T	T			T
T	F			T
F	T	?	?	F
F	F	?	?	F

wo die Leerzeichen darauf hinweisen, dass wir nicht weiter arbeiten müssen (da die Zeile nicht schlecht ist), und die Fragezeichen anzeigen, dass wir noch weiter prüfen müssen.

Die Prämisse, die am einfachsten zu bewerten ist, ist die Zweite. Also schauen wir uns diese als nächste an:

J	L	$\neg L \rightarrow (J \vee L)$	$\neg L$	J
T	T			T
T	F			T
F	T		F	F
F	F	?	T	F

Jetzt brauchen wir uns nicht länger um die dritte Zeile der Tabelle kümmern. Sie ist nicht schlecht, weil eine Prämisse in dieser Zeile falsch ist.

Zuletzt können wir die Wahrheitstabelle vervollständigen:

J	L	$\neg L \rightarrow (J \vee L)$	$\neg L$	J
T	T			T
T	F			T
F	T		F	F
F	F	T **F** F	T	F

Die Wahrheitstabelle hat keine schlechten Zeilen, also ist das Argument gültig. Jede Bewertung, die alle Prämissen wahr macht, macht auch die Schlussfolgerung wahr.

Es lohnt sich, uns die Taktik noch einmal anzuschauen. Betrachten Sie folgendes Argument:

$$A \vee B, \neg(B \wedge C) \therefore (A \vee \neg C)$$

Auch hier beginnen wir damit die Schlussfolgerung zu bewerten. Da es sich hier um eine Disjunktion handelt, ist sie notwendigerweise wahr, wenn eines der beiden Disjunkte wahr ist. Dies hilft uns unsere Arbeit zu beschleunigen.

A	B	C	$A \vee B$	$\neg(B \wedge C)$	$(A \vee \neg C)$
T	T	T			**T**
T	T	F			**T**
T	F	T			**T**
T	F	F			**T**
F	T	T	?	?	**F** F
F	T	F			**T** T
F	F	T	?	?	**F** F
F	F	F			**T** T

Wir können nun alle Zeilen ignorieren, ausgenommen jene, in denen der Satz nach dem Drehkreuz falsch ist. Wenn wir die zwei Sätze auf der linken Seite des Drehkreuzes bewerten, dann kriegen wir:

A	B	C	$A \vee B$	$\neg(B \wedge C)$	$(A \vee \neg C)$
T	T	T			**T**
T	T	F			**T**
T	F	T			**T**
T	F	F			**T**
F	T	T	**T**	**F** T	**F** F
F	T	F			**T** T
F	F	T	**F**		**F** F
F	F	F			**T** T

Das Argument ist gültig. Und unsere Abkürzungen haben uns *viel* Arbeit erspart.

Wir haben über Abkürzungen beim Testen auf Gültigkeit gesprochen. Aber genau dieselben Abkürzungen können auch beim Testen auf die Folgebeziehung verwendet werden. Wenn Sie einen analogen Begriff von schlechten Zeilen verwenden, können Sie sich so eine Menge Arbeit ersparen.

Übungen

A. Mithilfe von Abkürzungen, prüfen Sie, ob die folgenden Sätze Tautologien, Widersprüche oder weder noch sind.

1. $\neg B \wedge B$
2. $\neg D \vee D$
3. $(A \wedge B) \vee (B \wedge A)$
4. $\neg[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$
5. $A \leftrightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$
6. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow A$
7. $A \rightarrow (B \vee C)$
8. $(A \wedge \neg A) \rightarrow (B \vee C)$
9. $(B \wedge D) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \vee C)]$

KAPITEL 14

Partielle Wahrheitstabellen

Manchmal müssen wir nicht wissen, was in jeder Zeile einer Wahrheitstabelle der Fall ist. Manchmal genügen auch schon ein oder zwei Zeilen.

Tautologie. Um zu zeigen, dass ein Satz eine Tautologie ist, müssen wir zeigen, dass er jeder Bewertung nach wahr ist. Das heißt, wir müssen wissen, dass er in jeder Zeile der Wahrheitstabelle wahr ist. Daher brauchen wir eine komplette Wahrheitstabelle.

Um zu zeigen, dass ein Satz *keine* Tautologie ist, brauchen wir jedoch nur eine Zeile: eine Zeile, in der der Satz falsch ist. Nehmen Sie an, wir wollen zeigen, dass der Satz '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' keine Tautologie ist. Hierzu nutzen wir eine PARTIELLE WAHRHEITSTABELLE:

S	T	U	W	$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$
				F

Wir haben hier nur für eine Zeile Platz gelassen und nicht 16. Denn wir halten nur nach einer Zeile Ausschau, in der der Satz falsch ist.

Der Hauptjunktor des Satzes ist das Konditional. Damit das Konditional falsch ist, muss das Antezedens wahr sein und das

Konsequens falsch. Dementsprechend füllen wir unsere Tabelle ein:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
					T		**F**		F	

Damit '$(U \wedge T)$' wahr ist, müssen sowohl 'U' als auch 'T' wahr sein.

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
	T	T		T	T	T	**F**		F	

Nun brauchen wir nur noch '$(S \wedge W)$' falsch zu machen. Um das zu tun, müssen wir zumindest einen der beiden Satzbuchstaben 'S' und 'W' falsch machen. Falls wir wollen, können wir auch beide falsch machen. Es ist nur wichtig, dass der ganze Satz in dieser Zeile falsch ist. Eine willkürliche Entscheidung treffend, können wir die Tabelle auf diese Weise ausfüllen:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
F	T	T	F	T	T	T	**F**	F	F	F

Wir haben jetzt eine partielle Wahrheitstabelle, die zeigt, dass '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' keine Tautologie ist. Wir haben gezeigt, dass es eine Bewertung gibt, die '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' falsch macht, nämlich die Bewertung, die 'S' falsch, 'T' wahr, 'U' wahr und 'W' falsch macht.

Widersprüche. Um zu zeigen, dass ein Satz ein Widerspruch (in der WFL) ist, bedarf es einer kompletten Wahrheitstabelle: Wir müssen zeigen, dass es keine Bewertung gibt, die den Satz wahr macht; d.h., wir müssen zeigen, dass der Satz in jeder Zeile der Wahrheitstabelle falsch ist.

Um jedoch zu zeigen, dass etwas *kein* Widerspruch ist, müssen wir nur eine Bewertung finden, die den Satz wahr macht. Dafür reicht schon eine Zeile einer Wahrheitstabelle aus. Wir können dies mit dem gleichen Beispiel wie vorher veranschaulichen.

S	T	U	W	$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$
				T

Damit der Satz wahr ist, reicht es aus, sicherzustellen, dass das Antezedens falsch ist. Da das Antezedens eine Konjunktion ist, müssen wir nur eines seiner Konjunkte falsch machen. Eine willkürliche Wahl treffend, machen wir 'U' falsch; wir können dann den anderen Satzbuchstaben beliebige Wahrheitswerte zuweisen.

S	T	U	W	$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$
F	T	F	F	F F T **T** F F F

Äquivalenz. Um zu zeigen, dass zwei Sätze äquivalent sind, müssen wir zeigen, dass die Sätze jeder Bewertung nach den gleichen Wahrheitswert haben. Dies erfordert also eine komplette Wahrheitstabelle.

Um aber zu zeigen, dass zwei Sätze *nicht* äquivalent sind, müssen wir nur zeigen, dass es eine Bewertung gibt, laut der sie unterschiedliche Wahrheitswerte haben. Dazu bedarf es also nur einer einzeiligen partiellen Wahrheitstabelle. Füllen Sie die Tabelle so aus, dass ein Satz wahr und der andere falsch ist.

Konsistenz. Um zu zeigen, dass Sätze konsistent sind, müssen wir zeigen, dass es eine Bewertung gibt, die alle Sätze wahr macht. Dies erfordert nur eine partielle Wahrheitstabelle, mit einer Zeile.

Um aber zu zeigen, dass Sätze *in*konsistent, müssen wir zeigen, dass es keine Bewertung gibt, die alle Sätze wahr macht. Dies erfordert also eine komplette Wahrheitstabelle. Sie müssen zeigen, dass in jeder Zeile der Tabelle mindestens einer der Sätze falsch ist.

Folgebeziehung und Gültigkeit. Um zu zeigen, dass ein Argument gültig ist, müssen wir zeigen, dass es keine Bewertung gibt, die alle Prämissen des Arguments wahr, die Schlussfolgerung aber falsch, macht. Dies erfordert also eine komplette Wahrheitstabelle. (Gleiches gilt für die Folgebeziehung).

Um zu zeigen, dass ein Argument *un*gültig ist, müssen wir allerdings nur zeigen, dass es eine Bewertung gibt, die alle Prämissen wahr und die Schlussfolgerung falsch macht. Dazu bedarf es nur einer einzeiligen partiellen Wahrheitstabelle, in der alle Prämissen wahr sind, die Schlussfolgerung jedoch falsch. (Gleiches gilt auch für das Nichtvorhandensein der Folgebeziehung).

Wir können unsere Erkenntnisse in diesem Abschnitt wie folgt zusammenfassen:

	Ja	**Nein**
Tautologie?	komplett	einzeilig partiell
Widerspruch?	komplett	einzeilig partiell
äquivalent?	komplett	einzeilig partiell
konsistent?	einzeilig partiell	komplett
gültig?	komplett	einzeilig partiell
Folge?	komplett	einzeilig partiell

Übungen

A. Nutzen Sie komplette oder partielle Wahrheitstabellen (je nach Bedarf), um zu bestimmen, ob die Satzpaare äquivalent sind.

1. $A, \neg A$
2. $A, A \vee A$
3. $A \rightarrow A, A \leftrightarrow A$
4. $A \vee \neg B, A \rightarrow B$
5. $A \wedge \neg A, \neg B \leftrightarrow B$
6. $\neg(A \wedge B), \neg A \vee \neg B$
7. $\neg(A \rightarrow B), \neg A \rightarrow \neg B$
8. $(A \rightarrow B), (\neg B \rightarrow \neg A)$

B. Nutzen Sie komplette oder partielle Wahrheitstabellen (je nach Bedarf), um zu bestimmen, ob die folgenden Satzmengen konsistent oder inkonsistent sind.

1. $A \wedge B$, $C \to \neg B$, C
2. $A \to B$, $B \to C$, A, $\neg C$
3. $A \vee B$, $B \vee C$, $C \to \neg A$
4. A, B, C, $\neg D$, $\neg E$, F
5. $A \wedge (B \vee C)$, $\neg(A \wedge C)$, $\neg(B \wedge C)$
6. $A \to B$, $B \to C$, $\neg(A \to C)$

C. Nutzen Sie komplette oder partielle Wahrheitstabellen (je nach Bedarf), um zu bestimmen, ob die folgenden Argumente gültig oder ungültig sind:

1. $A \vee \big[A \to (A \leftrightarrow A)\big] \therefore A$
2. $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A) \therefore A$
3. $A \to B, B \therefore A$
4. $A \vee B, B \vee C, \neg B \therefore A \wedge C$
5. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$

D. Bestimmen Sie, ob die folgenden Sätze Tautologien, Widersprüche oder kontingente Sätze sind. Verteidigen Sie ihre Antwort anhand einer kompletten oder partiellen Wahrheitstabelle (je nach Bedarf).

1. $A \to \neg A$
2. $A \to (A \wedge (A \vee B))$
3. $(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$
4. $A \to \neg(A \wedge (A \vee B))$
5. $\neg B \to [(\neg A \wedge A) \vee B]$
6. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
7. $[(A \wedge B) \wedge C] \to B$
8. $\neg\big[(C \vee A) \vee B\big]$
9. $\big[(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)\big] \wedge C$

10. $(A \wedge B)] \rightarrow [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$

E. Bestimmen Sie, ob die folgenden Sätze Tautologien, Widersprüche oder kontingente Sätze sind. Begründen Sie ihre Antwort mittels einer kompletten oder partiellen Wahrheitstabelle (je nach Bedarf).

1. $\neg(A \vee A)$
2. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
3. $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$
4. $\neg[(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)]$
5. $(A \wedge B) \vee (A \vee B)$
6. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow A$
7. $A \rightarrow (B \vee C)$
8. $(A \wedge \neg A) \rightarrow (B \vee C)$
9. $(B \wedge D) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \vee C)]$
10. $\neg[(A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow D)]$

F. Anhand von komplette Wahrheitstabellen, bestimmen Sie, ob die folgenden Satzpaare äquivalent sind.

1. A und $A \vee A$
2. A und $A \wedge A$
3. $A \vee \neg B$ und $A \rightarrow B$
4. $(A \rightarrow B)$ und $(\neg B \rightarrow \neg A)$
5. $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$
6. $((U \rightarrow (X \vee X)) \vee U)$ und $\neg(X \wedge (X \wedge U))$
7. $((C \wedge (N \leftrightarrow C)) \leftrightarrow C)$ und $(\neg\neg\neg N \rightarrow C)$
8. $[(A \vee B) \wedge C]$ und $[A \vee (B \wedge C)]$
9. $((L \wedge C) \wedge I)$ und $L \vee C$

G. Bestimmen Sie, ob die folgenden Satzmengen konsistent oder inkonsistent sind. Begründen Sie Ihre Antwort mittels einer kompletten oder partiellen Wahrheitstabelle (je nach Bedarf).

1. $A \rightarrow A$, $\neg A \rightarrow \neg A$, $A \wedge A$, $A \vee A$

2. $A \to \neg A$, $\neg A \to A$
3. $A \vee B$, $A \to C$, $B \to C$
4. $A \vee B$, $A \to C$, $B \to C$, $\neg C$
5. $B \wedge (C \vee A)$, $A \to B$, $\neg(B \vee C)$
6. $(A \leftrightarrow B) \to B$, $B \to \neg(A \leftrightarrow B)$, $A \vee B$
7. $A \leftrightarrow (B \vee C)$, $C \to \neg A$, $A \to \neg B$
8. $A \leftrightarrow B$, $\neg B \vee \neg A$, $A \to B$
9. $A \leftrightarrow B$, $A \to C$, $B \to D$, $\neg(C \vee D)$
10. $\neg(A \wedge \neg B)$, $B \to \neg A$, $\neg B$

H. Bestimmen Sie, ob die folgenden Argumente gültig oder ungültig sind. Begründen Sie Ihre Antwort mittels einer kompletten oder partiellen Wahrheitstabelle (je nach Bedarf).

1. $A \to (A \wedge \neg A) \therefore \neg A$
2. $A \vee B$, $A \to B$, $B \to A \therefore A \leftrightarrow B$
3. $A \vee (B \to A) \therefore \neg A \to \neg B$
4. $A \vee B$, $A \to B$, $B \to A \therefore A \wedge B$
5. $(B \wedge A) \to C$, $(C \wedge A) \to B \therefore (C \wedge B) \to A$
6. $\neg(\neg A \vee \neg B)$, $A \to \neg C \therefore A \to (B \to C)$
7. $A \wedge (B \to C)$, $\neg C \wedge (\neg B \to \neg A) \therefore C \wedge \neg C$
8. $A \wedge B$, $\neg A \to \neg C$, $B \to \neg D \therefore A \vee B$
9. $A \to B \therefore (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
10. $\neg A \to B, \neg B \to C, \neg C \to A \therefore \neg A \to (\neg B \vee \neg C)$

I. Bestimmen Sie, ob die folgenden Argumente gültig oder ungültig sind. Begründen Sie Ihre Antwort mittels einer kompletten oder partiellen Wahrheitstabelle (je nach Bedarf).

1. $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A) \therefore A$
2. $A \vee B$, $B \vee C$, $\neg A \therefore B \wedge C$
3. $A \to C$, $E \to (D \vee B)$, $B \to \neg D \therefore (A \vee C) \vee (B \to (E \wedge D))$
4. $A \vee B$, $C \to A$, $C \to B \therefore A \to (B \to C)$
5. $A \to B$, $\neg B \vee A \therefore A \leftrightarrow B$

TEIL IV

Natürliche Herleitung für die WFL

KAPITEL 15
Natürliche Herleitungssysteme

In §2 hatten wir gesagt, dass ein Argument gültig ist dann und nur dann, wenn es keinen Fall gibt, in dem alle Prämissen wahr sind und die Schlussfolgerung falsch ist.

Diese Definition gab uns einen Grund, Wahrheitstabellen einzuführen. Jede Zeile einer kompletten Wahrheitstabelle entspricht einer Bewertung. Wenn wir also mit einem WFL-Argument konfrontiert werden, dann haben wir eine einfache Strategie, um herauszufinden, ob es eine Bewertung gibt, bei der die Prämissen des Arguments wahr sind und seine Schlussfolgerung falsch: wir gehen einfach die Wahrheitstabelle des Arguments durch.

Allerdings helfen uns die Wahrheitstabellen nur bedingt dabei, ein Verständnis dafür zu entwickeln, wieso bestimmte Argumente gültig sind. Betrachten Sie die folgenden zwei Argumente:

$$P \vee Q, \neg P \therefore Q$$
$$P \rightarrow Q, P \therefore Q$$

Diese sind klarerweise gültig. Sie können dies herausfinden, indem Sie eine vierzeilige Wahrheitstabelle konstruieren. Aber die beiden Argumente unterscheiden sich in ihrer *Form*. Und es wäre schon, diese verschiedenen Formen des Schließens nicht aus den Augen zu verlieren.

Ein Ziel eines *natürlichen Herleitungssystems* ist es, die Gültigkeit bestimmter Argument so zu überprüfen, dass wir nachvollziehen können, welche *Argumentation* ihrer Gültigkeit zu Grunde liegt. Wir fangen dazu mit sehr einfachen Herleitungsregeln an. Diese können wir dann zu komplexeren Argumenten kombinieren. Wir erhoffen uns, mit einem möglichst kleinem Startpaket möglichst viele gültige Argumente zu erfassen.

Dies ist eine ganz andere Art, Argumente zu begreifen.

Bei Wahrheitstabellen betrachten wir verschiedene Möglichkeiten, Bewertungen, Sätze wahr oder falsch zu machen. Bei natürlichen Herleitungssystemen hingegen manipulieren wir Sätze nach Herleitungsregeln, die wir im Vorhinein als gute Regeln festgelegt haben. Letzteres verspricht uns einen besseren Blick – oder zumindest einen anderen – auf die Gründe wieso bestimmte Argumente gültig sind.

Der Übergang zur natürlichen Herleitung ist nicht nur von der Suche nach besserem Verständnis motiviert. Er ist einfach notwendig. Betrachten Sie:

$$A_1 \to C_1 \therefore (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) \to (C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5)$$

Um herauszufinden, ob dieses Argument gültig ist, könnten Sie eine Wahrheitstabelle mit 1024 Zeilen konstruieren. Wenn Sie das erfolgreich täten, dann könnten Sie sehen, dass es keine Zeile gibt, in der alle Prämissen wahr sind und die Schlussfolgerung falsch. Sie könnten also wissen, dass das Argument gültig ist.

Eine solche Wahrheitstabelle ist schon lang. Aber betrachten Sie:

$$\begin{aligned} A_1 \to C_1 \therefore\ & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_6 \wedge A_7 \wedge A_8 \wedge A_9 \wedge A_{10}) \to \\ & (C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5 \vee C_6 \vee C_7 \vee C_8 \vee C_9 \vee C_{10}) \end{aligned}$$

Dieses Argument ist ebenfalls gültig. Aber um dies mittels einer Wahrheitstabelle herauszufinden bräuchten Sie eine Tabelle mit $2^{20} = 1048576$ Zeilen. Im Prinzip könnten wir hierzu einen Computer verwenden, der sich an Wahrheitstabellen abschindet und zurückmeldet, wenn er fertig ist. In der Praxis aber sind komplizierte Argumente der WFL *unlösbar*, wenn wir Wahrheitstabellen verwenden.

Wenn wir zur Logik erster Ordnung (LEO) kommen (in Kapitel 22), verschlimmert sich die Situation noch weiter. Es gibt keinen Wahrheitstabellen-Test in der LEO. Um herauszufinden, ob ein Argument der LEO gültig ist oder nicht, müssen wir über *alle* Interpretationen nachdenken. Aber wie wir sehen werden, gibt es unendlich viele mögliche Interpretationen. Nicht einmal einen Computer könnten wir so einstellen, dass er sich an unendlich vielen möglichen Interpretationen abschindet und am Ende Bericht erstattet: Der Rechenprozess des Computers würde nie fertig werden. Wir müssen also entweder eine effizientere Art und Weise finden, wie wir über alle Interpretationen nachdenken können, oder wir müssen nach einem anderen Test für die Gültigkeit suchen.

Es gibt in der Tat Systeme, die über alle möglichen Interpretationen Schlussfolgerungen liefern können. Sie wurden in den 1950er Jahren von Evert Beth und Jaakko Hintikka entwickelt. Aber wir werden uns nicht mit diesen Systemen auseinandersetzen. Stattdessen werden wir natürliche Herleitungssysteme einführen.

Anstatt uns (im Falle der WFL) direkt einen Überblick über alle möglichen Bewertungen zu verschaffen, werden wir einige einfache Herleitungsregeln auswählen. Einige dieser Regeln werden das Verhalten der Junktoren betreffen. Andere das Verhalten der Quantoren und der Identität, die das Markenzeichen der LEO sind. Das resultierende Herleitungssystem wird uns eine neue Art und Weise geben, die Gültigkeit von Argumenten zu überprüfen.

Die moderne Entwicklung der natürlichen Herleitung geht auf gleichzeitig erschienene, aber nicht zusammenhängende Arbeiten von Gerhard Gentzen und Stanisław Jaśkowski (1934) zurück. Das System der natürlichen Herleitung, das wir betrachten werden, basiert jedoch weitgehend auf Arbeiten von Frederic Fitch (erstmals 1952 veröffentlicht).

KAPITEL 16

Grundregeln für die WFL

Wir werden ein System der NATÜRLICHEN HERLEITUNG entwickeln. Für jeden Junktor wird es EINFÜHRUNGSREGELN geben, die es uns erlauben, einen Satz herzuleiten, der diesen Junktor als Hauptjunktor hat. Zudem wird es ELIMINATIONSREGELN geben, die es uns erlauben, aus einem Satz mit diesem Junktor als Hauptjunktor einen anderen Satz herzuleiten.

16.1 Die Idee eines formalen Beweises

Ein *formaler Beweis* ist eine Reihe von Sätzen, von denen einige als anfängliche Annahmen (oder Prämissen) gekennzeichnet sind. Die letzte Zeile eines formalen Beweises ist die Schlussfolgerung. (Im Folgenden werden wir formale Beweise einfach 'Beweise' nennen, aber seien Sie sich bewusst, dass es auch *informelle* Beweise gibt).

Zur Veranschaulichung, betrachten Sie:

$$\neg(A \lor B) \therefore \neg A \land \neg B$$

Wir beginnen einen Beweis, indem wir die Prämisse aufschreiben:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \neg(A \lor B) \\ \hline \end{array}$$

Beachten Sie, dass wir die Prämisse nummeriert haben, damit wir uns später auf sie beziehen können. *Jede* Beweiszeile ist nummeriert, damit wir uns später auf sie beziehen können.

Beachten Sie auch, dass wir einen Strich unter der Prämisse gezogen haben. Alles, was oberhalb des Strichs geschrieben ist, ist eine *Annahme* (oder Prämisse). Alles, was unter dem Strich aufgeschrieben wird, ist entweder etwas, das aus den Annahmen folgt, oder es ist eine neue Annahme. Wir hoffen, dass wir '$\neg A \wedge \neg B$' als Schlussfolgerung erreichen können; daher hoffen wir, unseren Beweis letztlich mit

$$n \quad | \quad \neg A \wedge \neg B$$

für irgendeine Zahl n abschließen zu können. Es spielt keine Rolle, auf welcher Zeilennummer wir enden. Aber wir würden natürlich einen kurzen Beweis einem langen vorziehen.

Nehmen wir an, wir betrachten:

$$A \vee B, \neg(A \wedge C), \neg(B \wedge \neg D) \therefore \neg C \vee D$$

Dieses Argument hat drei Prämissen. Also fangen wir an, indem wir sie alle aufschreiben, nummerieren und dann unter ihnen eine Linie ziehen:

$$\begin{array}{r|l}
1 & A \vee B \\
2 & \neg(A \wedge C) \\
3 & \neg(B \wedge \neg D) \\ \hline
\end{array}$$

Hier wollen wir mit folgender Zeile abschließen:

$$n \quad | \quad \neg C \vee D$$

Alles, was noch zu tun bleibt, ist, die Herleitungsregeln zu erklären, die wir auf dem Weg von den Prämissen hin zur Schlussfolgerung anwenden können. Die Regeln sind nach unseren Junktoren geordnet.

16.2 Wiederholung

Die allererste Regel ist so offensichtlich, dass es überraschend ist, dass wir uns überhaupt mit ihr beschäftigen.

Wenn Sie im Laufe eines Beweises bereits etwas hergeleitet haben, dann erlaubt Ihnen die *Wiederholungsregel* (auch Reiterationsregel genannt), es in einer neuen Zeile zu wiederholen. Zum Beispiel:

$$
\begin{array}{r|ll}
4 & A \wedge B & \\
\vdots & \vdots & \\
10 & A \wedge B & \text{R } 4
\end{array}
$$

Hier haben wir ‘$A \wedge B$’ erstmals in Zeile 4 aufgeschrieben. Nun, in einer späteren Zeile – Zeile 10, zum Beispiel – haben wir beschlossen, dass wir diesen Satz wiederholen wollen. Also schreiben wir ihn noch einmal auf. Wir fügen auch ein *Zitat* hinzu, welches den Satz, den wir aufgeschrieben haben, *rechtfertigt*. In diesem Fall schreiben wir ‘R’ (wie ‘Reiteration’), um kenntlich zu machen, dass wir die Wiederholungsregel verwenden, und wir schreiben ‘4’, um zu zeigen, dass wir sie auf Zeile 4 angewendet haben.

Hier ist eine allgemeine Formulierung der Wiederholungsregel:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{A} & \text{R } m
\end{array}
$$

Diese Regel besagt, dass, wenn irgendein Satz $\mathscr{A}$ in irgendeiner Zeile vorkommt, wir $\mathscr{A}$ in späteren Zeilen wiederholen können. Jede Zeile unseres Beweises muss durch irgendeine Regel gerechtfertigt sein: hier haben wir ‘R m’. Das bedeutet: Wiederholung, angewandt auf Zeile m.

Lassen Sie uns zwei Dinge betonen. Erstens: ‘$metavA$’ ist kein Satz der WFL. Es ist ein Symbol der Metasprache, das wir verwenden, wenn wir über einen beliebigen Satz der WFL sprechen wollen (siehe §8). Zweitens: das Symbol 'm' wird niemals in einem Beweis aufscheinen. Denn es ist ein Symbol der Metasprache, das wir verwenden, wenn wir über eine beliebige Zeilennummer eines Beweises sprechen wollen. In einem tatsächlichen Beweis sind die Zeilen mit '1', '2', '3' und so weiter nummeriert. Aber wenn wir die Regel definieren, verwenden wir Variablen wie 'm', um klarzustellen, dass die Regel an jedem beliebigen Punkt angewendet werden kann.

16.3 Konjunktion

Nehmen Sie an, wir wollen zeigen, dass Ludwig sowohl reaktionär als auch libertär ist. Ein offensichtlicher Weg, dies zu tun, wäre folgender: Zuerst zeigen wir, dass Ludwig reaktionär ist; dann zeigen wir, dass Ludwig libertär ist; dann fügen wir diese beiden Schlussfolgerungen zusammen, um die Konjunktion, dass Ludwig sowohl reaktionär als auch libertär ist, zu erhalten.

Unser natürliches Herleitungssystem erfasst diese Vorgehensweise auf eine einfache Art. Lassen Sie uns für das angegebene Beispiel den folgenden Symbolisierungsschlüssel verwenden:

R: Ludwig ist reaktionär.
L: Ludwig ist libertär.

Vielleicht arbeiten wir gerade an einem Beweis und haben 'R' auf Zeile 8 und 'L' auf Zeile 15 erhalten. Dann können wir auf folgende Art auf jeder folgenden Zeile '$R \wedge L$' erhalten:

8	R	
15	L	
	$R \wedge L$	$\wedge$I 8, 15

Beachten Sie, dass jede Zeile unseres Beweises entweder eine Annahme sein muss oder durch eine Herleitungsregel gerechtfertigt sein muss. Wir zitieren hier '$\wedge$I 8, 15', um anzuzeigen, dass wir die Zeile erhalten, indem wir die Regel der Konjunktionseinführung ($\wedge$I; 'I' wie 'Introduction') auf Zeilen 8 und 15 anwenden.

Ebenso könnten wir mittels dieser Regel das folgende erhalten:

$$
\begin{array}{r|ll}
8 & R & \\
15 & L & \\
 & L \wedge R & \wedge\text{I } 15, 8
\end{array}
$$

Wobei wir hier das Zitat umkehren, um die Reihenfolge der Konjunkte widerzuspiegeln.

Hier ist eine allgemeine Formulierung unserer KONJUNKTIONSEINFÜHRUNGSREGEL:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} & \\
n & \mathscr{B} & \\
 & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \wedge\text{I } m, n
\end{array}
$$

Der Klarheit wegen: die Formulierung der Regel ist *schematisch*. Sie ist selbst kein Beweis. '$\mathscr{A}$' und '$\mathscr{B}$' sind keine Sätze der WFL. Vielmehr sind sie Symbole der Metasprache, die wir verwenden, wenn wir über einen beliebigen Satz der WFL sprechen wollen (siehe §8). In ähnlicher Weise sind 'm' und 'n' keine Symbole, die in irgendeinem tatsächlichen Beweis aufscheinen würden. Sie sind Symbole der Metasprache, die wir verwenden, wenn wir über eine beliebige Zeilennummer eines beliebigen Beweises sprechen wollen. In einem tatsächlichen Beweis sind die Zeilen mit '1', '2', '3' und so weiter nummeriert. Aber wenn wir die Regel definieren, verwenden wir Variablen, um zu betonen, dass die Regel an jedem beliebigen Punkt angewendet werden kann. Die Regel verlangt nur, dass wir beide Konjunkte schon irgendwo im

Beweis zur Verfügung haben. Sie können voneinander getrennt, in verschiedenen Zeilen, und in beliebiger Reihenfolge auftreten.

Die Regel wird 'Konjunktions*einführung*' genannt, weil sie das Symbol '∧' in unseren Beweis einführt. Umgekehrt haben wir auch eine Regel, die dieses Symbol *eliminiert*. Nehmen Sie an, dass Sie gezeigt haben, dass Ludwig sowohl reaktionär als auch libertär ist. Sie haben nun das Recht zu sagen, dass Ludwig reaktionär ist. Ebenso haben Sie das Recht, daraus zu schließen, dass Ludwig libertär ist. Diesen Tatsachen entsprechend, formulieren wir unsere KONJUNKTIONSELIMINIERUNGSREGEL(n):

m	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	
	$\mathscr{A}$	$\wedge$E m

und gleichermaßen:

m	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	
	$\mathscr{B}$	$\wedge$E m

Diese Regel besagt, dass man, wenn man eine Konjunktion in einer Zeile eines Beweises hat, eines der beiden Konjunkte erhalten kann, indem man ∧E anwendet. Wichtig ist hier: Sie können diese Regel nur anwenden, wenn die Konjunktion der Hauptjunktor eines Satzes ist. Man kann also nicht 'D' von '$C \vee (D \wedge E)$' herleiten!

Schon mit den beiden Regeln, die wir bis jetzt eingeführt haben, ist unser Herleitungssystem sehr leistungsstark:

$$\begin{aligned} & [(A \vee B) \to (C \vee D)] \wedge [(E \vee F) \to (G \vee H)] \\ \therefore\ & [(E \vee F) \to (G \vee H)] \wedge [(A \vee B) \to (C \vee D)] \end{aligned}$$

Der Hauptjunktor in der Prämisse und der Schlussfolgerung dieses Arguments ist '∧'. Um einen Beweis zu erbringen, beginnen wir damit, die Prämisse als unsere Annahme aufzuschreiben. Unter ihr ziehen wir eine Linie: Alles nach dieser Linie muss aus unseren Annahmen durch (wiederholte Anwendung) unserer Herleitungsregeln folgen. Der Anfang des Beweises sieht also so aus:

1	$[(A \lor B) \to (C \lor D)] \land [(E \lor F) \to (G \lor H)]$	

Ausgehend von der Prämisse können wir jedes ihrer Konjunkte durch ∧E erhalten. Der Beweis sieht nun wie folgt aus:

1	$[(A \lor B) \to (C \lor D)] \land [(E \lor F) \to (G \lor H)]$	
2	$[(A \lor B) \to (C \lor D)]$	∧E 1
3	$[(E \lor F) \to (G \lor H)]$	∧E 1

Indem wir die ∧I-Regel auf die Zeilen 3 und 2 (in dieser Reihenfolge) anwenden, kommen wir nun zu unserer gewünschten Schlussfolgerung. Der fertige Beweis sieht wie folgt aus:

1	$[(A \lor B) \to (C \lor D)] \land [(E \lor F) \to (G \lor H)]$	
2	$[(A \lor B) \to (C \lor D)]$	∧E 1
3	$[(E \lor F) \to (G \lor H)]$	∧E 1
4	$[(E \lor F) \to (G \lor H)] \land [(A \lor B) \to (C \lor D)]$	∧I 3, 2

Dies ist ein sehr einfacher Beweis, aber er veranschaulicht sehr schön, wie wir Herleitungsregeln zu längeren Beweisen verketten können. Am Rande sei angemerkt, dass die komplette Wahrheitstabelle dieses Arguments 256 Zeilen erfordert hätte; unser formaler Beweis hingegen benötigte nur vier Zeilen.

Es lohnt sich, ein weiteres Beispiel durchzuarbeiten. Bereits in §11.3 haben wir festgestellt, dass dieses Argument gültig ist:

$$A \land (B \land C) \therefore (A \land B) \land C$$

Um nun einen Beweis dieser Tatsache zu erbringen, beginnen wir mit:

1	$A \land (B \land C)$	

Von der Prämisse ausgehend können wir jedes ihrer Konjunkte erhalten, indem wir zweimal $\land$E anwenden. Dann wenden wir $\land$E noch zwei weitere Male an. Wir erhalten hiermit den folgenden Beweis:

1	$A \land (B \land C)$	
2	A	$\land$E 1
3	$B \land C$	$\land$E 1
4	B	$\land$E 3
5	C	$\land$E 3

Jetzt aber können wir Konjunktionen wieder in der Reihenfolge einführen, in der wir sie brauchen. Unser fertiger Beweis sieht so aus:

1	$A \land (B \land C)$	
2	A	$\land$E 1
3	$B \land C$	$\land$E 1
4	B	$\land$E 3
5	C	$\land$E 3
6	$A \land B$	$\land$I 2, 4
7	$(A \land B) \land C$	$\land$I 6, 5

Erinnern Sie sich daran, dass unsere offizielle Definition von Sätzen der WFL nur Konjunktionen mit zwei Konjunkten erlaubte. Der soeben vorgelegte Beweis legt nahe, dass wir in allen unseren Beweisen innere Klammern weglassen könnten. Dies ist jedoch nicht üblich. Dementsprechend werden wir das auch nicht tun.

Stattdessen werden wir an unseren strengeren Klammerkonventionen festhalten. (Obwohl wir uns immer noch erlauben werden, die äußersten Klammern der Lesbarkeit halber wegzulassen).

Lassen Sie uns nun eine letzte Illustration geben. Bei der Anwendung der $\wedge$I-Regel gibt es keine Verpflichtung, sie auf verschiedene Sätze anzuwenden. Wenn wir wollen, können wir '$A \wedge A$' also von 'A' ausgehend wie folgt herleiten:

1	A	
2	$A \wedge A$	$\wedge$I 1, 1

Einfach, aber effektiv.

16.4 Konditional

Wenden Sie sich nun dem folgenden Argument zu:

Wenn Jane klug ist, dann ist sie schnell.
Jane ist klug.
$\therefore$ Jane ist schnell.

Dieses Argument ist klarerweise gültig. Seine Gültigkeit legt eine einfache Eliminierungsregel für das Konditional ($\rightarrow$E) nahe:

m	$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$	
n	$\mathscr{A}$	
	$\mathscr{B}$	$\rightarrow$E m, n

Diese Regel wird manchmal auch *Modus Ponens* genannt. Bei ihr handelt es sich um eine Eliminierungsregel. Denn sie erlaubt uns, einen Satz zu erhalten, in dem '$\rightarrow$' einmal weniger vorkommt, als in dem Satz, mit dem wir beginnen (dieser muss '$\rightarrow$' als Hauptjunktor enthalten). Es ist zu beachten, dass das Konditional $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ und das vorangehende $\mathscr{A}$ im Beweis voneinander getrennt und in beliebiger Reihenfolge auftreten können. Im Zitat für →E zitieren wir jedoch immer zuerst das Konditional, gefolgt vom Antezedens des Konditionals.

Die Regel für die Einführung eines Konditionals ist auch recht einfach zu motivieren. Das folgende Argument ist gültig:

> Ludwig ist reaktionär. Wenn Ludwig also libertär ist, dann ist Ludwig sowohl reaktionär als auch libertär.

Wenn jemand bezweifeln würde, dass dem so ist, könnten wir versuchen, ihn vom Gegenteil zu überzeugen, indem wir uns wie folgt erklären:

> Gehen Sie davon aus, dass Ludwig reaktionär ist. Nehmen Sie zusätzlich an, dass Ludwig libertär ist. Dann können wir mittels der Konjunktionseinführung, die wir gerade diskutiert haben, schließen, dass Ludwig sowohl reaktionär als auch libertär ist. Das setzt natürlich die Annahme voraus, dass Ludwig libertär ist. Aber das bedeutet nur, dass, wenn Ludwig ein Libertärer ist, er sowohl reaktionär als auch libertär ist.

Übertragen in das Format einer natürlichen Herleitung ist hier die Argumentationsform, die wir gerade verwendet haben. Wir haben mit einer Prämisse begonnen: ‘Ludwig ist reaktionär’, also:

$$\begin{array}{r|l} 1 & R \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Als Nächstes haben wir, um der Argumentation willen, eine zusätzliche Annahme aufgestellt: ‘Ludwig ist libertär’. Um darauf hinzuweisen, dass wir es nicht mehr mit unserer ursprünglichen Annahme (‘R’), sondern mit einer zusätzlichen Annahme zu tun haben, setzen wir unseren Beweis wie folgt fort:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & R & \\ \cline{2-2} 2 & \multicolumn{1}{|l}{L} & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Beachten Sie, dass wir in Zeile 2 *nicht* behaupten, dass wir 'L' aus Zeile 1 hergeleitet haben. Also schreiben wir keine Begründung für die zusätzliche Annahme in Zeile 2. Wir müssen jedoch darauf hinweisen, dass es sich um eine zusätzliche *Annahme* handelt. Wir tun dies, indem wir einen Strich darunter ziehen (um anzuzeigen, dass es sich um eine Annahme handelt) und sie mit einer weiteren vertikalen Linie einrücken (um anzuzeigen, dass es sich um eine *zusätzliche* Annahme handelt).

Mit dieser zusätzlichen Annahme im Köcher sind wir in der Lage, $\wedge$I zu verwenden. Wir können also unseren Beweis fortsetzen:

1	R	
2	$\quad L$	
3	$\quad R \wedge L$	$\wedge$I 1, 2

Hiermit haben wir gezeigt, dass wir unter der zusätzlichen Annahme von 'L' auch '$R \wedge L$' erhalten können. Wir können also schlussfolgern, dass, wenn wir 'L' haben, auch '$R \wedge L$' kriegen. Oder, um es anders auszudrücken, wir können '$L \rightarrow (R \wedge L)$' herleiten:

1	R	
2	$\quad L$	
3	$\quad R \wedge L$	$\wedge$I 1, 2
4	$L \rightarrow (R \wedge L)$	$\rightarrow$I 2–3

Beachten Sie, dass wir hier nur mehr auf *eine* vertikale Linie auf der linken Seite zurückgreifen. Wir haben die zusätzliche Annahme 'L' *getilgt*, da der Konditional aus unserer ursprünglichen Annahme 'R' alleine folgt.

Das allgemeine Schema, welches wir hier nutzen, ist das Folgende. Zuerst stellen wir eine zusätzliche Annahme auf, $\mathscr{A}$; von dieser zusätzlichen Annahme ausgehend, leiten wir $\mathscr{B}$ her. Daher wissen wir folgendes: Wenn $\mathscr{A}$ wahr ist, dann ist auch $\mathscr{B}$ wahr. Dies ist in der Regel für die Einführung des Konditionals zusammengefasst:

$$\begin{array}{l|l}
i & \quad \mathscr{A} \\
j & \quad \mathscr{B} \\
 & \mathscr{A} \to \mathscr{B} \qquad \to\mathrm{I}\ i\text{–}j
\end{array}$$

Es können beliebig viele oder wenige Zeilen zwischen den Zeilen i und j sein.

Um →I besser zu verstehen, wenden wir uns noch einer zweiten Illustration zu. Nehmen wir an, wir wollen Folgendes beweisen:

$$P \to Q, Q \to R \therefore P \to R$$

Wir beginnen damit, *beide* unserer Prämissen aufzuschreiben. Da wir dann zu einen Konditional (nämlich ‘$P \to R$’) kommen wollen, nehmen wir zusätzlich das Antezedens dieses Konditionals an. Damit beginnt unser Beweis:

$$\begin{array}{l|l}
1 & P \to Q \\
2 & Q \to R \\
\hline
3 & \quad P
\end{array}$$

Beachten Sie, dass wir ‘P’ als eine zusätzliche Annahme behandeln. Dadurch können wir jetzt →E auf die erste Prämisse anwenden. Dies wird ‘Q’ ergeben. Dann können wir →E auf die zweite Prämisse anwenden. Durch die Annahme von ‘P’ sind wir in der Lage, ‘R’ zu beweisen. Zuletzt wenden wir nun die →I-Regel an – tilgen ‘P’ – und beenden den Beweis. Zusammengefasst:

1	$P \to Q$	
2	$Q \to R$	
3	$\quad P$	
4	$\quad Q$	$\to$E 1, 3
5	$\quad R$	$\to$E 2, 4
6	$P \to R$	$\to$I 3–5

16.5 Zusätzliche Annahmen und Unterbeweise

Die Regel $\to$I nutzte die Idee, zusätzliche Annahmen zu treffen. Diese müssen mit einer gewissen Vorsicht behandelt werden. Betrachten Sie diesen Beweis:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad B$	R 2
4	$B \to B$	$\to$I 2–3

Dieser entspricht den Regeln, die wir bereits festgelegt haben; und das braucht uns nicht besonders merkwürdig vorzukommen. Da es sich bei '$B \to B$' um eine Tautologie handelt, sollten keine besonderen Annahmen erforderlich sein, um diesen Satz zu beweisen.

Aber nehmen wir mal, wir versuchen nun, den Beweis wie folgt fortzusetzen:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad B$	R 2
4	$B \to B$	$\to$I 2–3
5	B	unerlaubte Anwendung von $\to$E 4, 3

Wenn uns unser Herleitungssystem dies erlauben würde, wäre das eine Katastrophe. Denn wir könnten dann jeden beliebigen Satz von jedem anderen Satz herleiten. Wenn Sie mir jedoch sagen, dass Anne schnell ist (symbolisiert durch 'A'), sollten wir nicht schlussfolgern können, dass Königin Boudica zwanzig Fuß groß war (symbolisiert durch 'B')! Es muss uns verboten werden, dies zu tun. Aber wie sollen wir dieses Verbot umsetzen?

Wir können den Prozess, eine zusätzliche Annahme zu treffen, als das Durchführen eines *Unterbeweises* beschreiben: ein Nebenbeweis innerhalb eines Hauptbeweises. Wenn wir einen Unterbeweis beginnen, ziehen wir eine weitere vertikale Linie, um anzuzeigen, dass wir uns nicht mehr im Hauptbeweis befinden. Dann schreiben wir die Annahme auf, auf welcher der Unterbeweis basieren wird. Man kann sich einen Unterbeweis so vorstellen, dass wir uns fragen: *was könnten wir zeigen, wenn wir auch diese zusätzliche Annahme treffen würden?*

Wenn wir innerhalb eines Unterbeweises arbeiten, können wir uns auf die zusätzliche Annahme beziehen, die wir zu Beginn des Unterbeweises gemacht haben, und auf alles, was wir aus unseren ursprünglichen Annahmen herleiten konnten. (Schließlich sind diese ursprünglichen Annahmen immer noch vorhanden.) Irgendwann wollen wir jedoch aufhören, mit der zusätzlichen Annahme zu arbeiten: Wir wollen vom Unterbeweis zum Hauptbeweis zurückkehren. Um anzuzeigen, dass wir zum Hauptbeweis zurückkehren, geht die vertikale Linie für den Unterbeweis zu Ende. An diesem Punkt sagen wir, dass der Unterbeweis GE-

SCHLOSSEN ist. Nachdem wir einen Unterbeweis geschlossen haben, haben wir die zusätzliche Annahme beiseite gelegt. Dann ist es unzulässig, sich auf all jene Dinge zu berufen, die von dieser zusätzlichen Annahme abhängen. Daher legen wir fest:

> Um bei der Anwendung einer Regel eine einzelne Zeile zu zitieren:
>
> 1. muss diese Zeile vor jener Zeile stehen, in der die Regel angewandt wird
>
> 2. nicht innerhalb eines Unterbeweises auftreten, der vor jener Zeile, in der die Regel angewendet wird, geschlossen wurde.

Diese Bestimmung verbietet den katastrophalen Beweisversuch von oben. Die Regel $\rightarrow$E verlangt, dass wir zwei einzelne Zeilen der vorangegangenen Zeilen zitieren. Im obigen Beweisversuch tritt aber eine dieser Zeilen, nämlich Zeile 4, innerhalb eines Unterbeweises auf, der in Zeile 5 geschlossen wurde. Somit können wir die Regel $\rightarrow$E nicht anwenden.

Das Schließen eines Unterbeweises nennen wir auch das TILGEN der Annahmen dieses Unterbeweises. Wir können den Punkt also so formulieren: *Sie können sich nicht auf Dinge beziehen, die unter Verwendung bereits getilgter Annahmen hergeleitet wurden.*

Unterbeweise erlauben uns also, darüber nachzudenken, was wir zeigen können, wenn wir zusätzliche Annahmen treffen. Dies veranschaulicht, dass wir im Verlauf eines Beweises sehr sorgfältig darauf achten müssen, welche Annahmen wir zu einem bestimmten Zeitpunkt treffen. Unser Beweissystem stellt dies grafisch dar. (Das ist genau der Grund, warum wir uns entschieden haben, gerade dieses Herleitungssystem zu verwenden).

Wenn wir einmal angefangen haben, darüber nachzudenken, was wir durch zusätzliche Annahmen zeigen können, hält uns nichts mehr davon ab, die Frage zu stellen, was wir zeigen können, wenn wir noch mehr Annahmen treffen. Das kann uns dazu motivieren, einen Unterbeweis innerhalb eines Unterbeweises zu nutzen. Hier ist ein Beispiel, in dem wir nur die Regeln verwenden, die wir schon zur Verfügung haben:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad A \wedge B$	$\wedge$I 1, 2
5	$\quad C \rightarrow (A \wedge B)$	$\rightarrow$I 3–4
6	$B \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge B))$	$\rightarrow$I 2–5

Beachten Sie, dass sich das Zitat in Zeile 4 auf die ursprüngliche Annahme (in Zeile 1) und eine Annahme eines Unterbeweises (in Zeile 2) bezieht. Dies ist vollkommen in Ordnung, da keine der beiden Annahmen zu diesem Zeitpunkt (in Zeile 4) getilgt wurden.

Aber auch hier müssen wir sorgfältig darauf achten, was wir zu einem bestimmten Zeitpunkt annehmen. Nehmen Sie an, wir versuchen, den Beweis wie folgt fortzusetzen:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad A \wedge B$	$\wedge$I 1, 2
5	$\quad C \rightarrow (A \wedge B)$	$\rightarrow$I 3–4
6	$B \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge B))$	$\rightarrow$I 2–5
7	$C \rightarrow (A \wedge B)$	unerlaubte Anwendung von $\rightarrow$I 3–4

Das wäre katastrophal. Wenn wir Ihnen sagen, dass Anne klug ist, sind Sie nicht in der Lage, daraus herzuleiten, dass, wenn Cath klug ist (symbolisiert durch 'C'), Anne klug und Königin Boudica 20 Fuß groß ist. Aber das ist genau das, was ein solcher Beweisversuch zum Ziel hat.

Das wesentliche Problem ist, dass der Unterbeweis, der mit der Annahme 'C' begann, davon abhing, dass wir 'B' in Zeile 2 angenommen hatten. In Zeile 6 aber haben wir die Annahme 'B' *getilgt*: Wir haben aufgehört, uns zu fragen, was wir zeigen können, wenn wir auch 'B' annehmen. Es ist also schlichtweg Betrug, wenn wir versuchen, uns (in Zeile 7) auf den Unterbeweis zu beziehen, der mit der Annahme 'C' begann.

Wir legen also wie bisher fest, dass ein Unterbeweis nur dann auf einer Zeile zitiert werden kann, wenn er nicht innerhalb eines anderen Unterbeweises auftritt, der an dieser Zeile bereits abgeschlossen ist. Der katastrophale Beweisversuch verstößt gegen diese Bestimmung. Der Unterbeweis in Zeilen 3–4 tritt innerhalb eines Unterbeweises auf, der in Zeile 5 geschlossen wird. Er kann also nicht auf Zeile 7 geltend gemacht werden.

Hier ist ein weiterer Beweisversuch, den wir nicht zulassen:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad B \wedge C$	$\wedge$I 2, 3
5	$\quad\quad C$	$\wedge$E 4
6	$B \rightarrow C$	unerlaubte Anwendung von $\rightarrow$I 2–5

Hier versuchen wir, einen Unterbeweis zu zitieren, der auf Zeile 2 beginnt und auf Zeile 5 endet. Aber der Satz auf Zeile 5 hängt nicht nur von der Annahme auf Zeile 2 ab, sondern auch von einer weiteren Annahme (Zeile 3), die wir am Ende des Unterbeweises nicht getilgt haben. Der in Zeile 3 begonnene Unterbeweis ist bei Zeile 5 noch offen. Aber →I verlangt, dass die letzte Zeile *nur* auf der Annahme des zitierten Unterbeweises beruht, (der her in Zeile 2 mit der Annahme von 'B' beginnt), aber nicht auf der Annahme irgendwelcher Unterbeweise, die innerhalb des Unterbeweises vorkommen. Insbesondere darf die letzte Zeile des zitierten Unterbeweises selbst nicht innerhalb eines verschachtelten Unterbeweises liegen.

Um einen Unterbeweis bei der Anwendung einer Regel zu zitieren:

1. muss der zitierte Unterbeweis vollständig vor der Anwendung der Regel, von welcher er zitiert wird, liegen
2. darft der zitierte Unterbeweis nicht innerhalb eines anderen Unterbeweises liegen, der zum Zeitpunkt des Zitats schon geschlossen ist
3. darf die letzte Zeile des zitierten Unterbeweises nicht innerhalb eines weiteren Unterbeweises vorkommen.

Ein letzter Punkt, um hervorzuheben, wie Regeln angewendet werden können: Wenn eine Regel verlangt, dass Sie eine einzelne Zeile zitieren, können Sie nicht stattdessen einen Unterbeweis zitieren; und wenn sie verlangt, dass Sie einen Unterbeweis zitieren, können Sie stattdessen nicht einfach eine einzelne Zeile zitieren. Folgendes ist also zum Beispiel nicht erlaubt:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad B \wedge C$	$\wedge$I 2, 3
5	$\quad\quad C$	$\wedge$E 4
6	$\quad C$	versuchte Anwenudung von R 3–5
7	$B \to C$	$\to$I 2–6

Hier haben wir versucht, ‘C’ in Zeile 6 durch die Wiederholungsregel zu rechtfertigen, aber wir haben den Unterbeweis in den Zeilen 3–5 zitiert. Dieser Unterbeweis ist geschlossen und kann im Prinzip in Zeile 6 zitiert werden. (Zum Beispiel könnten wir ihn verwenden, um ‘$C \to C$’ durch $\to$I zu rechtfertigen.) Aber die Wiederholungsregel R verlangt, dass Sie eine einzelne Zeile zitieren. Das Zitieren eines gesamten Unterbeweises ist daher unzulässig (selbst wenn dieser Unterbeweis den Satz enthält, den wir wiederholen wollen).

Es ist immer zulässig, einen Unterbeweis mit einer beliebigen Annahme zu eröffnen. Jedoch ist strategisches Kalkül erforderlich, um eine nützliche Annahme auszuwählen. Einen Unterbeweis mit einer willkürlichen, verrückten Annahme zu beginnen, würde nur Zeilen des Beweises verschwenden. Um zum Beispiel einen Konditional durch $\to$I zu erhalten, dürfen Sie in einem Unterbeweis nur das Antezendens des Konditionals annehmen.

Gleichermaßen ist es immer zulässig, einen Unterbeweis zu schließen (und seine Annahmen zu tilgen). Es wird jedoch nicht hilfreich sein, dies zu tun, bis Sie etwas Nützliches erreicht haben. Sobald der Unterbeweis geschlossen ist, können Sie in einer Zitation nur noch den gesamten Unterbeweis zitieren. Jene Regeln, die einen Unterbeweis oder mehrere Unterbeweise voraussetzen, verlangen wiederum, dass die letzte Zeile des Unterbeweises ein

Satz mit einer bestimmten Form ist. Beispielsweise dürfen Sie einen Unterbeweis für $\rightarrow$I nur zitieren, wenn die Zeile, die Sie rechtfertigen wollen, die Form $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ hat, $\mathscr{A}$ die Annahme Ihres Unterbeweises und $\mathscr{B}$ die letzte Zeile Ihres Unterbeweises ist.

16.6 Bikonditional

Die Regeln für das Bikonditional können wir als "verdoppelte" Versionen der Regeln für den Konditional auffassen.

Um z.B. '$F \leftrightarrow G$' zu beweisen, muss man in der Lage sein, 'G' unter der Annahme von 'F' herzuleiten *und* 'F' unter der Annahme von 'G' herzuleiten. Die Bikonditionaleinführungsregel ($\leftrightarrow$I) erfordert daher zwei Unterbeweise. Schematisch funktioniert die Regel wie folgt:

i	$\quad\mathscr{A}$ (Annahme)	
j	$\quad\mathscr{B}$	
k	$\quad\mathscr{B}$ (Annahme)	
l	$\quad\mathscr{A}$	
	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$	$\leftrightarrow$I i–j, k–l

Beliebig viele Zeilen können zwischen i und j liegen und beliebig viele Zeilen zwischen k und l. Außerdem können die Unterbeweise in beliebiger Reihenfolge erfolgen und der zweite Unterbeweis muss nicht unmittelbar auf den ersten folgen.

Mit der Bikonditionaleliminationsregel ($\leftrightarrow$E) können Sie etwas mehr tun als mit der Eliminationsregel für das Konditional. Wenn Sie den linken Teilsatz eines Bikonditionals haben, können Sie den rechten Teilsatz herleiten. Und umgekehrt: wenn Sie den rechten Teilsatz haben, können Sie den linken herleiten. Also erlauben wir:

m	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$	
n	$\mathscr{A}$	
	$\mathscr{B}$	$\leftrightarrow$E m, n

und ebenso:

m	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$	
n	$\mathscr{B}$	
	$\mathscr{A}$	$\leftrightarrow$E m, n

Beachten Sie, dass das Bikonditional und der rechte oder linke Teilsatz voneinander getrennt und in beliebiger Reihenfolge auftreten können. Im Zitat für $\leftrightarrow$E zitieren wir jedoch immer zuerst den Bikonditional.

16.7 Disjunktion

Nehmen Sie an, Ludwig ist reaktionär. Dann ist Ludwig entweder reaktionär oder libertär. Denn zu sagen, dass Ludwig entweder reaktionär oder libertär ist, heißt ja, etwas schwächeres zu sagen, als, dass Ludwig reaktionär ist.

Lassen Sie uns diesen Punkt noch einmal hervorheben. Nehmen Sie an, Ludwig ist reaktionär. Daraus folgt, dass Ludwig *entweder* reaktionär *oder* eine Kumquat ist. Ebenso folgt daraus, dass Ludwig *entweder* reaktionär ist *oder*, die Kumquat die einzige Zitrusfrucht ist. Gleichermaßen folgt daraus, dass Ludwig *entweder* reaktionär ist *oder* Gott tot ist. Viele dieser Herleitungen sind merkwürdig, aber sie sind *logisch* nicht zu beanstanden (auch wenn sie vielleicht alle möglichen impliziten Gesprächsnormen verletzen).

Bewaffnet mit all dem, hier sind die Einführungsregeln der Disjunktion:

$$\begin{array}{r|l}
m & \mathscr{A} \\
 & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \qquad \vee\mathrm{I}\ m
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{r|l}
m & \mathscr{A} \\
 & \mathscr{B} \vee \mathscr{A} \qquad \vee\mathrm{I}\ m
\end{array}$$

Beachten Sie, dass $\mathscr{B}$ ein *beliebiger* Satz ist, so dass der folgende Beweis vollkommen akzeptabel ist:

$$\begin{array}{r|l}
1 & M \\ \cline{2-2}
2 & M \vee ([(A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \wedge D)] \leftrightarrow [E \wedge F]) \qquad \vee\mathrm{I}\ 1
\end{array}$$

Die Gültigkeit dieses Arguments mittels einer kompletten Wahrheitstabelle zu zeigen, hätte 128 Zeilen erfordert.

Die Eliminationsregel für die Disjunktion ist leider etwas komplizierter. Nehmen wir an, dass Ludwig entweder reaktionär oder libertär ist. Was können Sie daraus schließen? Nicht, dass Ludwig reaktionär ist; es könnte ja sein, dass er stattdessen libertär ist. Ebenso wenig, dass Ludwig libertär ist; denn er könnte ja auch nur reaktionär sein. Disjunktionen, für sich genommen, geben nicht viel her.

Aber nehmen wir an, wir könnten irgendwie beides zeigen: erstens, dass aus Ludwigs reaktionärer Einstellung folgt, dass er ein österreichischer Ökonom ist; zweitens, dass aus Ludwigs libertärer Einstellung folgt, dass er ein österreichischer Ökonom ist. Wenn wir dann erfahren, dass Ludwig entweder reaktionär oder libertär ist, dann können wir daraus schließen, dass Ludwig, was auch immer er ist, ein österreichischer Ökonom ist. Diese Tatsache kann in der folgenden Regel kodifiziert werden, die unsere Regel zur Elimination von Disjunktionen (∨E) ist:

$$
\begin{array}{l|l}
m & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \\
i & \quad \mid\ \underline{\mathscr{A}} \\
j & \quad \mid\ \mathscr{C} \\
k & \quad \mid\ \underline{\mathscr{B}} \\
l & \quad \mid\ \mathscr{C} \\
 & \mathscr{C} \qquad\qquad \vee\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

Diese Regel ist etwas klobiger als unsere bisherigen Regeln, aber die Idee, die hinter ihr steckt, ist einfach. Nehmen wir an, wir haben eine Disjunktion, $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$. Nehmen wir auch an, wir haben zwei Unterbeweise, die uns zeigen, dass $\mathscr{C}$ aus der Annahme folgt, dass $\mathscr{A}$, und dass $\mathscr{C}$ aus der Annahme folgt, dass $\mathscr{B}$. Dann können wir daraus $\mathscr{C}$ herleiten. Wie üblich kann es beliebig viele Zeilen zwischen i und j und beliebig viele Zeilen zwischen k und l geben. Außerdem können die Unterbeweise und die Disjunktion in beliebiger Reihenfolge vorkommen und müssen keine Nachbarn sein.

Einige Beispiele werden uns helfen, die Regel zu veranschaulichen. Fangen wir hiermit an:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \therefore P$$

So könnte ein Beweis für dieses Argument aussehen:

1	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	
2	$\quad P \wedge Q$	
3	$\quad P$	$\wedge$E 2
4	$\quad P \wedge R$	
5	$\quad P$	$\wedge$E 4
6	P	$\vee$E 1, 2–3, 4–5

Hier ist ein etwas herausforderndere Beispiel:

$$A \wedge (B \vee C) \therefore (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Und hier ein dazu passender Beweis:

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	$\wedge$E 1
3	$B \vee C$	$\wedge$E 1
4	$\quad B$	
5	$\quad A \wedge B$	$\wedge$I 2, 4
6	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$I 5
7	$\quad C$	
8	$\quad A \wedge C$	$\wedge$I 2, 7
9	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$I 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$E 3, 4–6, 7–9

Seien Sie nicht beunruhigt, wenn Sie glauben, dass Sie nicht in der Lage gewesen wären, diesen Beweis selbst zu erarbeiten. Die Fähigkeit, Beweise zu finden, erlernen Sie mit ausreichender Übung. Und wir werden in §17 einige Strategien zum Erarbeiten von Beweisen einführen. Zurzeit ist nur essenziell, dass Sie beim

Betrachten des Beweises sehen können, dass er den von uns festgelegten Regeln entspricht. Dazu gehört, jede Zeile zu überprüfen und sicherzustellen, dass sie nach den von uns festgelegten Regeln gerechtfertigt ist.

16.8 Widerspruch und Negation

Wir haben nur noch einen Junktor, mit dem wir uns befassen müssen: die Negation. Aber um das zu tun, müssen wir die Negation in eine Beziehung mit dem *Widerspruch* setzen.

Eine sehr wirksame Form der Argumentation ist es, Ihr Widerpart dazu zu bringen, sich selbst zu widersprechen. An diesem Punkt haben Sie die Oberhand. Ihr Widerpart muss mindestens eine seiner/ihrer Annahmen aufgeben. Wir werden diese Idee in unserem Beweissystem nutzen, indem wir ein neues Symbol, '⊥', zu unseren Beweisen hinzufügen. Dies sollte als so etwas wie 'Widerspruch!' oder 'Reductio!' oder 'Das ist absurd!' verstanden werden. Die Einführungsregel für dieses Symbol ist, dass wir es immer dann einführen können, wenn wir uns explizit widersprechen, d.h. wenn wir sowohl einen Satz als auch seine Negation in unserem Beweis haben:

m	$\neg\mathscr{A}$	
n	$\mathscr{A}$	
	$\bot$	$\neg$E m, n

Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge der Satz und seine Negation vorkommen; sie müssen auch nicht auf benachbarten Zeilen erscheinen. Wir geben jedoch immer zuerst die Zeilennummer der Negation an, gefolgt von der Zeilennummer des Satzes, der verneint wird.

Es besteht offensichtlich ein enger Zusammenhang zwischen dem Widerspruch und der Negation.

Die Regel ¬E lässt uns einen expliziten Widerspruch $\perp$ von zwei widersprüchlichen Sätzen herleiten – $\mathscr{A}$ und seiner Verneinung $\neg\mathscr{A}$. Wir wählen das Etikett ¬E aus dem folgenden Grund: Diese Regel erlaubt uns, von einer Prämisse, die eine Negation als Hauptjunktor enthält ($\neg\mathscr{A}$), zu einem Satz zu gelangen, der diese Negation nicht enthält: $\perp$. Es ist also eine Regel, die ¬ *eliminiert.*

Wir haben gesagt, dass '$\perp$' als so etwas wie 'Widerspruch!' gelesen werden sollte, aber das sagt uns noch nicht viel über das Symbol. Es gibt zumindest drei Möglichkeiten, das Symbol besser zu verstehen.

- Wir könnten '$\perp$' als einen neuen einfachen Satz der WFL verstehen, welcher jeder Bewertung nach falsch ist.
- Wir könnten '$\perp$' als eine Abkürzung für ein Musterbeispiel eines Widerspruchs verstehen, z.B. '$A \wedge \neg A$'. Dies hat den gleichen Effekt wie die erste Option – offensichtlich hat '$A \wedge \neg A$' immer den Wahrheitswert Falsch. Aber es bedeutet, dass wir offiziell kein neues Symbol zur WFL hinzufügen müssen.
- Wir könnten '$\perp$' als ein Satzzeichen verstehen, welches in unseren Beweisen vorkommen kann, aber kein Symbol der WFL ist. (Damit ist es so zu verstehen, wie Zeilennummern und horizontale und vertikale Linien.)

Die dritte Option ist besonders faszinierend, aber hier werden wir uns *offiziell* für die erste Option entscheiden. '$\perp$' ist als ein Satzbuchstabe zu lesen, der immer falsch ist. Das bedeutet, dass wir ihn in unseren Beweisen genau so wie jeden anderen Satz manipulieren können.

Zuletzt müssen wir noch eine Regel für die Einführung der Verneinung (¬I) festlegen. Diese Regel ist sehr einfach. Wenn eine Annahme zu einem Widerspruch führt, dann muss die Annahme falsch sein. Dieser Gedanke motiviert die folgende Regel:

$$\begin{array}{l|l|ll}
i & & \mathscr{A} & \\
\cline{3-3}
j & & \bot & \\
 & \neg\mathscr{A} & & \neg\mathrm{I}\ i\text{–}j
\end{array}$$

Es können beliebig viele Zeilen zwischen i und j liegen.

Um diese Regel in der Praxis und im Zusammenspiel mit der Negation zu sehen, betrachten Sie diesen Beweis:

$$\begin{array}{l|l|ll}
1 & D & & \\
\cline{2-2}
2 & & \neg D & \\
\cline{3-3}
3 & & \bot & \neg\mathrm{E}\ 2, 1 \\
4 & \neg\neg D & & \neg\mathrm{I}\ 2\text{–}3
\end{array}$$

Wenn die Annahme, dass $\mathscr{A}$ wahr ist, zu einem Widerspruch führt, dann kann $\mathscr{A}$ nicht wahr sein, d.h. es muss falsch sein, d.h. $\neg\mathscr{A}$ muss wahr sein.

Wenn aber die Annahme, dass $\mathscr{A}$ falsch ist (d.h. die Annahme, dass $\neg\mathscr{A}$ wahr ist), zu einem Widerspruch führt, dann kann $\mathscr{A}$ nicht falsch sein, d.h. $\mathscr{A}$ muss wahr sein. Wir können also die folgende Regel formulieren:

$$\begin{array}{l|l|ll}
i & & \neg\mathscr{A} & \\
\cline{3-3}
j & & \bot & \\
 & \mathscr{A} & & \mathrm{IB}\ i\text{–}j
\end{array}$$

Diese Regel wird manchmal *indirekter Beweis* (‘IB’) genannt, da sie uns erlaubt, $\mathscr{A}$ indirekt zu beweisen, indem wir seine Negation annehmen. Formal ist die Regel sehr ähnlich zu $\neg$I, aber $\mathscr{A}$ und $\neg\mathscr{A}$ haben die Plätze gewechselt. Da $\neg\mathscr{A}$ nicht die Schlussfolgerung der Regel ist, führen wir $\neg$ nicht ein, sodass IB keine Regel ist, die einen Junktor einführt. Sie eliminiert allerdings auch keinen Junktor, da sie keine freistehenden Prämissen hat, die $\neg$ enthalten, sondern nur einen Unterbeweis mit einer Annahme der Form $\neg\mathscr{A}$. Im Gegensatz dazu hat $\neg$E eine Prämisse der Form $\neg\mathscr{A}$: deshalb eliminiert $\neg$E $\neg$, im Gegensatz zu IB.[1]

Unter Verwendung von $\neg$I waren wir in der Lage, $\neg\neg\mathscr{D}$ von $\mathscr{D}$ ausgehend zu beweisen. Mittels IB können wir die Rückrichtung bilden (wobei der Beweis im Wesentlichen gleich verläuft).

1	$\neg\neg D$	
2	$\quad \neg D$	
3	$\quad \bot$	$\neg$E 1, 2
4	D	IB 2–3

Wir brauchen noch eine letzte Regel: eine Art Eliminationsregel für '$\bot$', manchmal *Explosion* genannt. [2] Wenn wir einen Widerspruch erhalten, symbolisiert durch '$\bot$', so besagt diese Regel, dass wir daraus herleiten können, was immer wir auch wollen.

Wie kann diese Regel als Herleitungsregel motiviert werden? Hierzu können wir uns den idiomatischen Ausdruck 'wenn das wahr ist, dann fresse ich einen Besen' vor Augen führen. Da Widersprüche einfach nicht wahr sein können, werde ich meinen Besen nicht nur fressen, sondern ihn auch haben, wenn einer dieser Widersprüche wahr ist. Hier ist die formale Regel:

---

[1]Es gibt Logiker, die Bedenken gegen IB haben, aber nicht gegen $\neg$E. Man nennt sie 'Intuitionisten'. Intuitionisten kaufen uns unsere Grundannahme nicht ab, dass jeder Satz einen von zwei Wahrheitswerten hat, wahr oder falsch. Sie denken auch, dass $\neg$ anders funktioniert – für sie garantiert das Herleiten von $\bot$ von $\mathscr{A}$, dass $\neg\mathscr{A}$ wahr ist; das Herleiten von $\bot$ von $\neg\mathscr{A}$ allerdings garantiert nicht, dass $\mathscr{A}$ wahr ist, sondern nur, dass $\neg\neg\mathscr{A}$ wahr ist. Für Intuitionisten sind also $\mathscr{A}$ und $\neg\neg\mathscr{A}$ nicht äquivalent.

[2]Der lateinische Name für dieses Prinzip ist *ex contradictione quod libet*, 'aus Widerspruch folgt alles.'

$$\begin{array}{r|ll} m & \bot & \\ & \mathscr{A} & \text{X } m \end{array}$$

Beachten Sie, dass $\mathscr{A}$ jeder beliebige Satz sein kann.

Die Explosionsregel ist natürlich etwas merkwürdig. Es sieht so aus, als käme $\mathscr{A}$ in unserem Beweis wie ein Hase aus dem Hut gezaubert. Wenn man versucht, Beweise zu finden, ist es sehr verlockend, zu versuchen, diese Regel überall einzusetzen, da sie so mächtig zu sein scheint. Leider müssen Sie dieser Versuchung widerstehen: Sie können die Explosionsregel nur anwenden, wenn Sie bereits $\bot$ haben! Und Sie erhalten nur dann $\bot$, wenn Ihre Annahmen widersprüchlich sind.

Trotzdem, ist es nicht merkwürdig, dass aus einem Widerspruch irgendetwas folgen sollte? Nicht, wenn es nach unseren Definitionen der Folgebeziehung und der Gültigkeit geht. Denn $\mathscr{A}$ hat $\mathscr{B}$ als eine Folge, wenn es keine Bewertung der Satzbuchstaben gibt, die $\mathscr{A}$ wahr und $\mathscr{B}$ falsch macht. Nun ist aber $\bot$ ein Widerspruch—es ist niemals wahr, unabhängig von der Bewertung der Satzbuchstaben. Da es keine Bewertung gibt, die $\bot$ wahr macht, gibt es natürlich auch keine Bewertung, die $\bot$ wahr und $\mathscr{B}$ falsch macht! Nach unserer Definition der Folgebeziehung gilt also: $\bot \vDash \mathscr{B}$, was auch immer $\mathscr{B}$ ist. Ein Widerspruch zieht alles nach sich. [3]

Dies sind alle Grundregeln für unser Herleitungssystem der WFL.

Übungen

A. Die folgenden zwei 'Beweise' sind *inkorrekt*. Erklären Sie, welche Fehler gemacht wurden.

[3] Es gibt einige Logiker*innen, die das nicht glauben. Sie sind der Meinung, dass, wenn $\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$ zur Folge hat, es eine relevante Verbindung zwischen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ gibt – und es gibt keine zwischen $\bot$ und einem beliebigen Satz $\mathscr{B}$. Also entwickeln diese Logiker*innen andere, 'relevante' Logiken, die die Explosionsregel nicht beinhalten.

1	$(\neg L \wedge A) \vee L$	
2	| $\neg L \wedge A$	
3	| $\neg L$	$\wedge$E 3
4	| A	$\wedge$E 1
5	| L	
6	| $\bot$	$\neg$E 3, 5
7	| A	X 6
8	A	$\vee$E 1, 2–4, 5–7

1	$A \wedge (B \wedge C)$	
2	$(B \vee C) \rightarrow D$	
3	B	$\wedge$E 1
4	$B \vee C$	$\vee$I 3
5	D	$\rightarrow$E 4, 2

B. Bei den folgenden drei Beweisen fehlen die Zitate (Regeln und Zeilennummern). Fügen Sie diese hinzu, um sie zu *korrekten* Beweisen zu machen. Schreiben Sie zusätzlich das Argument auf, das dem jeweiligen Beweis entspricht.

1	$P \wedge S$
2	$S \rightarrow R$
3	P
4	S
5	R
6	$R \vee E$

1	$A \rightarrow D$
2	| $A \wedge B$
3	| A
4	| D
5	| $D \vee E$
6	$(A \wedge B) \rightarrow (D \vee E)$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \neg L \to (J \vee L) \\
2 & \neg L \\ \cline{2-2}
3 & J \vee L \\
4 & \begin{array}{|l} J \\ \hline \end{array} \\
5 & \begin{array}{|l} J \wedge J \end{array} \\
6 & \begin{array}{|l} J \end{array} \\
7 & \begin{array}{|l} L \\ \hline \end{array} \\
8 & \begin{array}{|l} \bot \end{array} \\
9 & \begin{array}{|l} J \end{array} \\
10 & J
\end{array}
$$

C. Geben Sie für jedes der folgenden Argumente einen Beweis an:

1. $J \to \neg J \therefore \neg J$
2. $Q \to (Q \wedge \neg Q) \therefore \neg Q$
3. $A \to (B \to C) \therefore (A \wedge B) \to C$
4. $K \wedge L \therefore K \leftrightarrow L$
5. $(C \wedge D) \vee E \therefore E \vee D$
6. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$
7. $\neg F \to G, F \to H \therefore G \vee H$
8. $(Z \wedge K) \vee (K \wedge M), K \to D \therefore D$
9. $P \wedge (Q \vee R), P \to \neg R \therefore Q \vee E$
10. $S \leftrightarrow T \therefore S \leftrightarrow (T \vee S)$
11. $\neg(P \to Q) \therefore \neg Q$
12. $\neg(P \to Q) \therefore P$

KAPITEL 17
Beweise konstruieren

Es gibt kein einfaches Rezept, um Beweise zu finden, und es gibt keinen Ersatz für das Üben. Einige Faustregeln und Strategien gibt es aber doch.

17.1 Rückwärts arbeiten

Sie versuchen also, einen Beweis für irgendeine Schlussfolgerung zu finden $\mathscr{C}$, die die letzte Zeile Ihres Beweises sein wird. Als erstes schauen Sie sich $\mathscr{C}$ an und fragen, was die Einführungsregel für ihren wichtigsten logischen Operator ist. Dadurch erhalten Sie eine Vorstellung davon, was vor der letzten Zeile des Beweises geschehen muss. Die Begründungen für die Einführungsregel erfordern ein oder zwei weitere Sätze über der letzten Zeile, oder ein oder zwei Unterbeweise. Indem Sie sich $\mathscr{C}$ anschauen, können Sie erkennen, welche Sätze das sind oder was die Annahmen und Schlussfolgerungen des/der Unterbeweises/Unterbeweise sind. Dann können Sie diese Sätze, oder den/die Unterbeweis/e, über der letzten Zeile aufschreiben und diese als Ihre neuen Ziele behandeln.

Zum Beispiel: Wenn Ihre Schlussfolgerung ein Konditional $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ ist, dann planen Sie, die $\rightarrow$I-Regel anzuwenden. Dazu ist es erforderlich, einen Unterbeweis mit der Annahme $\mathscr{A}$ zu beginnen. Dieser Unterbeweis muss mit $\mathscr{B}$ enden. Denken Sie dann weiter darüber nach, was Sie tun müssen, um $\mathscr{B}$ in diesem Unterbeweis herzuleiten und wie Sie die Annahme $\mathscr{A}$ zu diesem Zweck verwenden können.

Wenn Ihr Ziel ein Konditional, eine Konjunktion, oder eine Negation ist, dann sollten Sie damit beginnen, auf diese Weise rückwärts zu arbeiten. Wir werden detailliert beschreiben, was Sie in jedem dieser Fälle zu tun haben.

Rückwärts arbeiten von einer Konjunktion

Wenn wir beweisen wollen, dass $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$, dann bedeutet rückwärts zu arbeiten, dass wir $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ am Ende unseres Beweises schreiben, und versuchen diese Konjunktion mit $\wedge$I herzuleiten. Oben schreiben wir die Prämissen des Beweises auf, falls es welche gibt. Dann schreiben wir unten den Satz auf, den wir beweisen wollen. Wenn es eine Konjunktion ist, leiten wir sie mit $\wedge$I her.

1	$\mathscr{P}_1$	
	$\vdots$	
k	$\mathscr{P}_k$	
	$\vdots$	
n	$\mathscr{A}$	
	$\vdots$	
m	$\mathscr{B}$	
$m+1$	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	$\wedge$I n, m

Für $\wedge$I müssen wir zuerst $\mathscr{A}$ und dann $\mathscr{B}$ herleiten. Um die letzte Zeile zu erhalten, müssen wir die Zeilen zitieren, in denen wir $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ hergeleitet haben und $\wedge$I verwenden. Die Teile des Beweises, die mit $\vdots$ gefüllt sind, müssen noch ausgefüllt werden. Wir werden die Zeilennummern m, n vorerst markieren. Wenn der Beweis vollständig ist, dann können diese Platzhalter durch tatsächliche Zahlen ersetzt werden.

Rückwärts arbeiten von einem Konditional

Wenn es unser Ziel ist, einen Konditional $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ zu beweisen, müssen wir $\to$I verwenden. Dies erfordert einen Unterbeweis, der mit $\mathscr{A}$ beginnt und mit $\mathscr{B}$ endet. Wir richten unseren Beweis wie folgt ein:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \mathscr{A} & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \mathscr{B} & \\
m+1 & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A} \to \mathscr{B}} & \to\text{I } n\text{–}m
\end{array}
$$

Auch hier werden wir wieder Platzhalter in den Zeilennummern-Slots verwenden. Wir notieren die letzte Regel, die wir verwenden, als $\to$I und zitieren den Unterbeweis.

Rückwärts arbeiten von einer Negation

Wenn wir $\neg\mathscr{A}$ beweisen wollen, dann müssen wir $\neg$I verwenden.

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \mathscr{A} & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \bot & \\
m+1 & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathscr{A}} & \neg\text{I } n\text{–}m
\end{array}
$$

Um das zu tun, brauchen wir einen Unterbeweis, der mit der Annahme $\mathscr{A}$ beginnt; die letzte Zeile des Unterbeweises muss $\bot$ sein. Wir zitieren den Unterbeweis und verwenden als Regel $\neg$I.

Wenn Sie rückwärts arbeiten, machen Sie so lange so weiter, wie Sie können. Wenn Sie also rückwärts arbeiten, um $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ zu beweisen, und einen Unterbeweis verwenden, in dem Sie $\mathscr{B}$ beweisen wollen, dann schauen Sie sich $\mathscr{B}$ an. Wenn es etwa eine

Konjunktion ist, dann arbeiten Sie rückwärts von ihr und schreiben Sie die beiden Konjunkte innerhalb Ihres Unterbeweises auf, und so fort.

Rückwärts arbeiten von einer Disjunktion

Natürlich können Sie von einer Disjunktion $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ aus auch rückwärts arbeiten. Die $\vee$I-Regel erfordert, dass Sie einen der Disjunkte haben, um auf $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ schließen zu können. Um also rückwärts zu arbeiten, wählen Sie einen Disjunkt und leiten daraus $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ her. Dann suchen Sie weiter nach einem Beweis für das von Ihnen gewählte Disjunkt:

$$\begin{array}{l|ll}
 & \vdots & \\
n & \mathscr{A} & \\
n+1 & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \vee\text{I } n
\end{array}$$

Es kann jedoch sein, dass Sie den von Ihnen gewählten Disjunkt nicht beweisen können. In diesem Fall müssen Sie eine andere Strategie wählen. Wenn Sie die $\vdots$ nicht ausfüllen können, löschen Sie alles, und versuchen Sie es mit dem anderen Disjunkt:

$$\begin{array}{l|ll}
 & \vdots & \\
n & \mathscr{B} & \\
n+1 & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \vee\text{I } n
\end{array}$$

Es ist natürlich frustrierend, alles zu löschen und von vorne anzufangen. Also sollten Sie das vermeiden. Wenn Ihr Ziel eine Disjunktion ist, sollten Sie daher generell nicht rückwärts arbeiten. Versuchen Sie zuerst, *vorwärts* zu arbeiten, und wenden Sie die $\vee$I-Strategie nur an, wenn das Vorwärtsarbeiten (und das Rückwärtsarbeiten mit $\wedge$I, $\to$I und $\neg$I) nicht mehr funktioniert.

17.2 Vorwärts arbeiten

Ihre Beweise haben oft Prämissen. Und wenn Sie rückwärts gearbeitet haben, um einen Konditional oder eine Negation zu beweisen, dann werden Sie Unterbeweise verwenden und versuchen, einen bestimmten Satz im Unterbeweis herzuleiten. Diese Prämissen und Annahmen sind Sätze, von denen aus Sie vorwärts arbeiten können, um die fehlenden Schritte in Ihrem Beweis zu vervollständigen. Das bedeutet, dass Eliminationsregeln für die Hauptjunktoren dieser Sätze angewendet werden müssen. Die Form der Regeln wird Ihnen sagen, was Sie zu tun haben.

Vorwärts arbeiten von einer Konjunktion

Um von einem Satz der Form $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ vorwärts zu arbeiten, nutzen wir $\wedge$E. Diese Regel erlaubt uns zwei Dinge: $\mathscr{A}$ herzuleiten und $\mathscr{B}$ herzuleiten. Also gilt: In einem Beweis, in dem wir $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ haben, können wir vorwärts arbeiten, indem wir $\mathscr{A}$ und/oder $\mathscr{B}$ unmittelbar unter der Konjunktion aufschreiben:

n	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	
$n+1$	$\mathscr{A}$	$\wedge$E n
$n+2$	$\mathscr{B}$	$\wedge$E n

In der Regel wird in der jeweiligen Situation klar sein, welchen von $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sie benötigen. Es schadet jedoch nicht, sie beide aufzuschreiben.

Vorwärts arbeiten von einer Disjunktion

Das Vorwärtsarbeiten von einer Disjunktion aus funktioniert etwas anders. Um eine Disjunktion zu verwenden, verwenden wir die $\vee$E-Regel. Um diese Regel anzuwenden, reicht es nicht aus zu wissen, was die Disjunkte der Disjunktion sind, die wir verwenden wollen. Wir müssen auch im Auge behalten, was wir beweisen wollen. Nehmen wir an, wir wollen $\mathscr{C}$ beweisen und wir haben $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$. (Dieser Satz kann eine Prämisse des Beweises, die Annahme eines Unterbeweises, oder etwas bereits Hergeleitetes sein). Um die $\vee$E-Regel anwenden zu können, müssen wir zwei Unterbeweise nutzen:

$$
\begin{array}{l|lll}
n & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & & \\
n+1 & \quad \mathscr{A} & & \\
 & \quad \vdots & & \\
m & \quad \mathscr{C} & & \\
m+1 & \quad \mathscr{B} & & \\
 & \quad \vdots & & \\
k & \quad \mathscr{C} & & \\
k+1 & \mathscr{C} & & \vee\text{E } n,\ (n+1)\text{–}m,\ (m+1)\text{–}k
\end{array}
$$

Der erste Unterbeweis beginnt mit dem ersten Disjunkt, $\mathscr{A}$, und endet mit dem gesuchten Satz, $\mathscr{C}$. Der zweite Unterbeweis beginnt mit dem anderen Disjunkt, $\mathscr{B}$, und endet ebenfalls mit dem Zielsatz $\mathscr{C}$. Jeder dieser Unterbeweise muss weiter ausgefüllt werden. Wenn wir dies erfolgreich tun, dann können wir den Zielsatz $\mathscr{C}$ mit $\vee$E begründen, indem wir die Zeile mit $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ und die beiden Unterbeweise zitieren.

Vorwärts arbeiten von einem Konditional

Um ein Konditional $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ zu verwenden, brauchen Sie auch das Antezedens $\mathscr{A}$. Andernfalls können Sie die Regel $\to$E nicht anwenden. Um also vom Konditional vorwärts zu arbeiten, werden Sie $\mathscr{B}$ herleiten und es mit $\to$E begründen, indem Sie $\mathscr{A}$ zum vorläufigen Ziel machen.

n	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	
	$\vdots$	
m	$\mathscr{A}$	
$m+1$	$\mathscr{B}$	$\to$E n, m

Vorwärts arbeiten von einem verneinten Satz

Um schließlich einen verneinten Satz $\neg\mathscr{A}$ zu verwenden, wenden Sie $\neg$E an. Dies erfordert zusätzlich zu $\neg\mathscr{A}$ auch den entsprechenden Satz $\mathscr{A}$ ohne Negation. Der Satz, den Sie am Ende erhalten, ist immer derselbe: $\perp$. Das Weiterarbeiten von einer Negation funktioniert also besonders gut innerhalb eines Unterbeweises, den Sie für $\neg$I (oder IB) verwenden. Sie arbeiten von $\neg\mathscr{A}$ vorwärts, wenn Sie bereits $\neg\mathscr{A}$ haben und $\perp$ herleiten wollen. Dazu deklarieren Sie $\mathscr{A}$ als Ihr neues Ziel.

n	$\neg\mathscr{A}$	
	$\vdots$	
m	$\mathscr{A}$	
$m+1$	$\perp$	$\neg$E n, m

17.3 Anwendungen

Nehmen wir an, wir wollen zeigen, dass das Argument $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \therefore A \wedge (B \vee C)$ gültig ist. Wir beginnen den Beweis, indem wir die Prämisse und die Schlussfolgerung aufschreiben. (Auf einem Blatt Papier möchten Sie so viel Platz wie letztendlich nötig dazwischen haben. Also schreiben Sie die Prämissen oben und die Schlussfolgerung unten auf das Blatt).

$$
\begin{array}{r|l}
1 & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
\hline
 & \vdots \\
n & A \wedge (B \vee C)
\end{array}
$$

Wir haben jetzt zwei Möglichkeiten: Entweder wir arbeiten rückwärts von der Schlussfolgerung aus oder wir arbeiten vorwärts von der Prämisse aus.

Wir entscheiden uns für die zweite Strategie: Wir verwenden die Disjunktion in Zeile 1, und richten die Unterbeweise ein, die wir für $\vee$E benötigen. Die Disjunktion in Zeile 1 hat zwei Disjunkte, $A \wedge B$ und $A \wedge C$. Der Zielsatz, den wir herleiten wollen, ist $A \wedge (B \vee C)$. In diesem Fall müssen wir also zwei Unterbeweise verwenden, einen mit der Annahme $A \wedge B$ und der letzten Zeile $A \wedge (B \vee C)$, den anderen mit der Annahme $A \wedge C$ und der letzten Zeile $A \wedge (B \vee C)$. Die Begründung für die Schlussfolgerung auf Zeile n wird $\vee$E sein, wobei die Disjunktion auf Zeile 1 und die beiden Unterbeweise zitiert werden. Ihr Beweis sieht nun also wie folgt aus:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & \multicolumn{1}{l}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} & \\
\hline
2 & \quad A \wedge B & \\
 & \quad \vdots & \\
n & \quad A \wedge (B \vee C) & \\
n+1 & \quad A \wedge C & \\
 & \quad \vdots & \\
m & \quad A \wedge (B \vee C) & \\
m+1 & A \wedge (B \vee C) & \vee\text{E } 1,\ 2\text{–}n,\ n+1\text{–}m
\end{array}
$$

Sie haben nun zwei Aufgaben, nämlich jeden der beiden Unterbeweise auszufüllen. Im ersten Unterbeweis arbeiten wir nun rückwärts von der Schlussfolgerung $A \wedge (B \vee C)$ aus. Diese ist eine

Konjunktion, d.h. innerhalb des ersten Unterbeweises haben Sie zwei separate *Unterziele*: A und $B \vee C$. Diese Unterziele erlauben Ihnen, Zeile n mit $\wedge$I zu begründen. Ihr Beweis sieht nun wie folgt aus:

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & \\
\hline
2 & \quad \vert\ \underline{A \wedge B} & \\
 & \quad \vert\ \vdots & \\
i & \quad \vert\ A & \\
 & \quad \vert\ \vdots & \\
n-1 & \quad \vert\ B \vee C & \\
n & \quad \vert\ A \wedge (B \vee C) & \wedge\mathrm{I}\ i,\ n-1 \\
n+1 & \quad \vert\ \underline{A \wedge C} & \\
 & \quad \vert\ \vdots & \\
m & \quad \vert\ A \wedge (B \vee C) & \\
m+1 & A \wedge (B \vee C) & \vee\mathrm{E}\ 1,\ 2\text{–}n,\ (n+1)\text{–}m
\end{array}
$$

Wir sehen sofort, dass wir Zeile i von Zeile 2 durch das Anwenden von $\wedge$E erhalten können. Also ist Zeile i eigentlich Zeile 3, und kann mit $\wedge$E auf Zeile 2 angewandt gerechtfertigt werden.

Das andere Unterziel $B \vee C$ ist eine Disjunktion. Wir arbeiten hier rückwärts von unserer Disjunktion bis zur Linie $n - 1$. Wir haben die Wahl, welchen Disjunkt wir als Unterziel wählen, B oder C. C zu wählen, würde nicht funktionieren und wir müssten am Ende alles noch einmal aufrollen. Und man kann bereits sehen, dass man, wenn man B als Unterziel wählt, dieses einfach erreichen kann, indem man von der Konjunktion $A \wedge B$ in Zeile 2 vorwärts arbeitet. Wir können also den ersten Unterbeweis wie folgt vervollständigen:

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & \\
\hline
2 & \quad | \; A \wedge B & \\
3 & \quad | \; A & \wedge\text{E } 2 \\
4 & \quad | \; B & \wedge\text{E } 2 \\
5 & \quad | \; B \vee C & \vee\text{I } 4 \\
6 & \quad | \; A \wedge (B \vee C) & \wedge\text{I } 3, 5 \\
7 & \quad | \; A \wedge C & \\
 & \quad | \; \vdots & \\
m & \quad | \; A \wedge (B \vee C) & \\
m+1 & A \wedge (B \vee C) & \vee\text{E } 1, 2\text{–}6, 7\text{–}m
\end{array}
$$

Wie Zeile 3 erhalten wir Zeile 4 durch Anwendung von $\wedge$E auf Zeile 2. Zeile 5 rechtfertigen wir durch Anwendung von $\vee$I auf Zeile 4, da wir rückwärts von der dortigen Disjunktion gearbeitet haben.

Das war der erste Unterbeweis. Den zweiten können wir auf eine ganz ähnliche Art erarbeiten. Den lassen wir Ihnen als Übung.

Als wir mit unserem Beweis begannen, hatten wir die Möglichkeit, von der Prämisse ausgehend vorwärts oder von der Schlussfolgerung ausgehend rückwärts zu arbeiten, und wir wählten die erste Option. Auch die zweite Option führt zu einem Beweis, aber dieser wird anders aussehen. Die ersten Schritte würden darin bestehen, von der Schlussfolgerung aus rückwärts zu arbeiten und zwei Unterziele aufzustellen, A und $B \vee C$. Dann würden wir von der Prämisse aus vorwärts arbeiten, um unsere beiden Unterziele zu beweisen, z.B.:

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	$\quad A \wedge B$	
	$\quad \vdots$	
k	$\quad A$	
$k+1$	$\quad A \wedge C$	
	$\quad \vdots$	
$n-1$	$\quad A$	
n	A	$\vee$E 1, 2–k, $(k+1)$–$(n-1)$
$n+1$	$\quad A \wedge B$	
	$\quad \vdots$	
l	$\quad B \vee C$	
$l+1$	$\quad A \wedge C$	
	$\quad \vdots$	
$m-1$	$\quad B \vee C$	
m	$B \vee C$	$\vee$E 1, $(n+1)$–l, $(l+1)$–$(m-1)$
$m+1$	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge$I n, m

Wir überlassen es Ihnen, die mit $\vdots$ gekennzeichneten fehlenden Abschnitte des Beweises zu ergänzen.

Lassen Sie uns ein weiteres Beispiel geben, um zu veranschaulichen, wie die Strategien zum Umgang mit Konditionalen und Negationen anzuwenden sind. Der Satz $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ ist eine Tautologie. Mal sehen, ob wir mit den uns zur Verfügung stehenden Strategien einen Beweis dafür finden können, ganz ohne Prämissen. Zuerst schreiben wir den Satz auf das untere Ende eines Blatt Papiers. Da es keine Möglichkeit gibt, vorwärts zu arbeiten (es gibt nichts, von dem aus man vorwärts arbeiten kann), arbeiten wir rückwärts und erstellen einen Unterbeweis, um den Satz, den wir wollen $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$, unter Verwendung von $\to$I herzuleiten. Die Annahme dieses Unterbeweises muss das Antezedens des Konditionals sein, das wir beweisen wollen, d.h. $A \to B$, und seine letzte Zeile muss das Konsequens $\neg B \to \neg A$ sein.

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \begin{array}{|l} A \to B \\ \hline \vdots \\ \neg B \to \neg A \end{array} & \\
n & & \\
n+1 & (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) & \to\text{I } 1\text{–}n
\end{array}
$$

Unser neues Ziel, $\neg B \to \neg A$ ist selbst ein Konditional. Also erstellen wir, rückwärts arbeitend, einen weiteren Unterbeweis:

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \begin{array}{|l} A \to B \\ \hline \begin{array}{|l} \neg B \\ \hline \vdots \\ \neg A \end{array} \\ \neg B \to \neg A \end{array} & \\
2 & & \\
n-1 & & \\
n & & \to\text{I } 2\text{–}(n-1) \\
n+1 & (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) & \to\text{I } 1\text{–}n
\end{array}
$$

Von $\neg A$ arbeiten wir wieder rückwärts. Sehen Sie sich dazu die $\neg$I-Regel an. Sie erfordert einen Unterbeweis mit A als Annahme und $\bot$ in der letzten Zeile. Der Beweis lautet also jetzt:

1	$\quad A \to B$	
2	$\quad\quad \neg B$	
3	$\quad\quad\quad A$	
	$\quad\quad\quad \vdots$	
$n-2$	$\quad\quad\quad \bot$	
$n-1$	$\quad\quad \neg A$	$\neg$I 3–$(n-2)$
n	$\quad \neg B \to \neg A$	$\to$I 2–$(n-1)$
$n+1$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$I 1–n

Jetzt ist unser Ziel, $\bot$ herzuleiten. Wir sagten oben, als wir darüber diskutierten, wie man von einer Negation aus arbeitet, dass die $\neg$E-Regel es erlaubt, $\bot$ herzuleiten. Wir suchen also nach einer Negation, von der aus wir vorwärts arbeiten können: $\neg B$ in Zeile 2. Das bedeutet, dass wir B innerhalb des Unterbeweises herleiten müssen, denn $\neg$E erfordert nicht nur $\neg B$ (was wir bereits haben), sondern auch B. B wiederum erhalten wir, indem wir von $A \to B$ vorwärts arbeiten, da $\to$E es uns erlauben wird, das Konsequens dieses Konditionals, B herzuleiten. Die Regel $\to$E erfordert auch das Antezedens A des Konditionals. Aber das ist bereits verfügbar (in Zeile 3). Und so können wir nun unseren Beweis abschließen:

1	$\quad A \to B$	
2	$\quad\quad \neg B$	
3	$\quad\quad\quad A$	
4	$\quad\quad\quad B$	$\to$E 1, 3
5	$\quad\quad\quad \bot$	$\neg$E 2, 4
6	$\quad\quad \neg A$	$\neg$I 3–5
7	$\quad \neg B \to \neg A$	$\to$I 2–6
8	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$I 1–7

17.4 Vorwärts arbeiten von $\bot$

Wenn Sie die oben genannten Strategien anwenden, werden Sie sich manchmal in einer Situation wiederfinden, in der Sie $\bot$ herleiten können. Wenn Sie die Explosionsregel anwenden, können Sie dann alles rechtfertigen, was Sie wollen. $\bot$ funktioniert also wie ein Platzhalter bei Beweisen. Nehmen wir zum Beispiel an, Sie wollen einen Beweis für das Argument $A \vee B, \neg A \therefore B$. Sie erstellen Ihren Beweis, schreiben die Prämissen $A \vee B$ und $\neg A$ oben auf die Zeilen 1 und 2, und geben die Schlussfolgerung B in der letzten Zeile an. B hat keinen Hauptjunktor. Also können Sie nicht von B aus rückwärts arbeiten. Stattdessen müssen Sie von $A \vee B$ vorwärts arbeiten. Das erfordert zwei Unterbeweise, etwa so:

1	$A \vee B$	
2	$\neg A$	
3	$\quad A$	
	$\quad \vdots$	
m	$\quad B$	
$m+1$	$\quad B$	
	$\quad \vdots$	
k	$\quad B$	
$k+1$	B	$\vee$E 1, 3–m, $(m+1)$–k

Beachten Sie, dass Sie $\neg A$ in Zeile 2 haben und A als Annahme in Ihrem ersten Unterbeweis. Das gibt Ihnen $\bot$ unter Verwendung von $\neg$E, und von $\bot$ können Sie B mittels der Explosionsregel herleiten. Erinnern Sie sich, dass Sie einen Satz wiederholen können, den Sie bereits haben, indem Sie die Wiederholungsregel R verwenden. Unser Beweis sieht nun so aus:

1	$A \vee B$	
2	$\neg A$	
3	$\quad A$	
4	$\quad \bot$	$\neg$E 2, 3
5	$\quad B$	X 4
6	$\quad B$	
7	$\quad B$	R 6
8	B	$\vee$E 1, 3–5, 6–7

17.5 Indirekt voranschreiten

In sehr vielen Fällen zahlen sich die Strategien, vorwärts und rückwärts zu arbeiten, aus. Aber es gibt Fälle, in denen sie nicht funktionieren. Wenn Sie keine Möglichkeit finden, $\mathscr{A}$ direkt mithilfe dieser Strategien zu zeigen, verwenden Sie stattdessen IB. Richten Sie dazu einen Unterbeweis ein, in dem Sie $\neg\mathscr{A}$ annehmen. In diesem Unterbeweis versuchen Sie nun $\perp$ herzuleiten.

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \neg A & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \perp & \\
m+1 & \mathscr{A} & & \text{IB } n\text{–}m
\end{array}
$$

Hier müssen wir einen Unterbeweis mit der Annahme $\neg\mathscr{A}$ beginnen; die letzte Zeile des Unterbeweises muss $\perp$ sein. Wir zitieren den Unterbeweis und verwenden IB als Regel. Im Unterbeweis haben wir nun eine zusätzliche Annahme (in Zeile n), mit der wir arbeiten müssen.

Nehmen wir an, wir haben die Strategie des indirekten Beweises verwendet, oder wir befinden uns in einer anderen Situation, in der wir $\perp$ herleiten wollen. Was ist ein guter Kandidat für eine solche Herleitung? Natürlich wäre es naheliegend, eine Negation zu verwenden, da (wie wir oben gesehen haben) $\neg$E immer $\perp$ ergibt. Wenn Sie einen Beweis wie oben aufgestellt haben und versuchen, $\mathscr{A}$ mittels IB zu beweisen, verwenden Sie $\neg\mathscr{A}$ als Annahme Ihres Unterbeweises. Wenn Sie also von $\neg\mathscr{A}$ ausgehend vorwärts arbeitend $\perp$ herleiten wollen, ist Ihr nächstes Ziel $\mathscr{A}$ in Ihrem Unterbeweis zu erhalten. Wenn Sie diese IB-Strategie anwenden, werden Sie sich in der folgenden Situation wiederfinden:

n	$\quad \neg\mathscr{A}$	
	$\quad \vdots$	
$m-1$	$\quad \mathscr{A}$	
m	$\quad \bot$	$\neg$E n, $m-1$
$m+1$	$\mathscr{A}$	IB n–m

Das sieht komisch aus: Wir wollten $\mathscr{A}$ beweisen, und unsere Strategien haben versagt; also haben wir IB eingesetzt. Aber jetzt befinden wir uns, scheinbar, wieder in der gleichen Situation: Wir suchen wieder nach einem Beweis für $\mathscr{A}$. Aber beachten Sie, dass wir uns jetzt in einem Unterbeweis befinden. In diesem Unterbeweis haben wir zudem eine zusätzliche Annahme ($\neg\mathscr{A}$) zur Verfügung, die wir vorher nicht zur Verfügung hatten. Sehen wir uns ein Beispiel an.

17.6 Indirekter Beweis des ausgeschlossenen Dritten

Der Satz $A \vee \neg A$ ist eine Tautologie und sollte daher auch ohne Prämissen zu beweisen sein. Aber rückwärts zu arbeiten scheitert: um $A \vee \neg A$ mit $\vee$I zu erhalten, müssten wir entweder A oder $\neg A$ ohne Prämissen beweisen. Doch keiner der beiden Sätze ist eine Tautologie. Also werden wir auch nicht in der Lage sein, einen der beiden zu beweisen. Vorwärts zu arbeiten funktioniert auch nicht, da es nichts gibt, von dem aus wir vorwärts arbeiten könnten. Die einzige Möglichkeit ist also ein indirekter Beweis.

1	$\quad \neg(A \vee \neg A)$	
	$\quad \vdots$	
m	$\quad \bot$	
$m+1$	$A \vee \neg A$	IB 1–m

Jetzt haben wir etwas, von dem aus wir vorwärts arbeiten können: die Annahme $\neg(A \vee \neg A)$. Um sie zu verwenden, rechtfertigen wir $\perp$ durch $\neg$E, indem wir die Annahme auf Zeile 1 und auch den entsprechenden nicht negierten Satz $A \vee \neg A$ zitieren, der noch zu beweisen ist.

$$
\begin{array}{l|l|ll}
1 & & \neg(A \vee \neg A) & \\
\cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m-1 & & A \vee \neg A & \\
m & & \perp & \neg\text{E } 1,\ m-1 \\
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{l|ll}
m+1 & A \vee \neg A & \text{IB } 1\text{–}m \\
\end{array}
$$

Am Anfang konnten wir nicht rückwärts arbeiten, um $A \vee \neg A$ durch Anwendung von $\vee$I herzuleiten. Aber jetzt sind wir in einer anderen Situation: Wir wollen $A \vee \neg A$ innerhalb eines Unterbeweises herleiten.

Im Allgemeinen sollten wir, wenn wir uns neue Ziele fassen, mit den grundlegenden Strategien beginnen. In diesem Fall sollten wir zuerst versuchen, von der Disjunktion $A \vee \neg A$ aus rückwärts zu arbeiten, d.h. wir wählen einen Disjunkt aus und versuchen, ihn herzuleiten. Wählen wir $\neg A$. Dies lässt uns $A \vee \neg A$ auf Zeile $m-1$ mittels $\vee$I rechtfertigen. Dann arbeiten wir von $\neg A$ rückwärts und beginnen einen weiteren Unterbeweis, um $\neg A$ mit $\neg$I zu rechtfertigen. Dieser Unterbeweis muss A als Annahme und $\perp$ in der letzten Zeile haben.

1	$\quad\quad \neg(A \vee \neg A)$	
2	$\quad\quad\quad\quad A$	
	$\quad\quad\quad\quad \vdots$	
$m-3$	$\quad\quad\quad\quad \bot$	
$m-2$	$\quad\quad \neg A$	$\neg$I 2–$(m-3)$
$m-1$	$\quad\quad A \vee \neg A$	$\vee$I $m-2$
m	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 1, $m-1$
$m+1$	$A \vee \neg A$	IB 1–m

In diesem neuen Unterbeweis müssen wir $\bot$ erneut herleiten. Der beste Weg, dies zu tun, ist, von einer Negation auszugehen; $\neg(A \vee \neg A)$ in Zeile 1 ist die einzige Negation, die wir verwenden können. Der entsprechende nicht negierte Satz, $A \vee \neg A$, folgt jedoch direkt aus A (den wir in Zeile 2 haben) mittels $\vee$I. Unser vollständiger Beweis ist:

1	$\quad\quad \neg(A \vee \neg A)$	
2	$\quad\quad\quad\quad A$	
3	$\quad\quad\quad\quad A \vee \neg A$	$\vee$I 2
4	$\quad\quad\quad\quad \bot$	$\neg$E 1, 3
5	$\quad\quad \neg A$	$\neg$I 2–4
6	$\quad\quad A \vee \neg A$	$\vee$I 5
7	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 1, 6
8	$A \vee \neg A$	IB 1–7

Übungen

A. Verwenden Sie die oben genannten Strategien, um Beweise für jedes der folgenden Argumente zu finden:

1. $A \to B, A \to C \therefore A \to (B \land C)$
2. $(A \land B) \to C \therefore A \to (B \to C)$
3. $A \to (B \to C) \therefore (A \to B) \to (A \to C)$
4. $A \lor (B \land C) \therefore (A \lor B) \land (A \lor C)$
5. $(A \land B) \lor (A \land C) \therefore A \land (B \lor C)$
6. $A \lor B, A \to C, B \to D \therefore C \lor D$
7. $\neg A \lor \neg B \therefore \neg(A \land B)$
8. $A \land \neg B \therefore \neg(A \to B)$

B. Formulieren Sie Strategien für das Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten von $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ aus.

C. Verwenden Sie die oben genannten Strategien, um Beweise für jedes der folgenden Argumente zu finden:

1. $\neg A \to (A \to \bot)$
2. $\neg(A \land \neg A)$
3. $[(A \to C) \land (B \to C)] \to [(A \lor B) \to C]$
4. $\neg(A \to B) \to (A \land \neg B)$
5. $(\neg A \lor B) \to (A \to B)$

Da es sich dabei um Beweise von Sätzen ohne die Nutzung von Prämissen handeln soll, beginnen Sie mit dem jeweiligen Satz am *Ende* des Beweises (dieser Beweis wird keine Prämissen haben).

D. Verwenden Sie die oben genannten Strategien, um Beweise für jedes der folgenden Argumente zu finden:

1. $\neg\neg A \to A$
2. $\neg A \to \neg B \therefore B \to A$
3. $A \to B \therefore \neg A \lor B$
4. $\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$
5. $A \to (B \lor C) \therefore (A \to B) \lor (A \to C)$
6. $(A \to B) \lor (B \to A)$
7. $((A \to B) \to A) \to A$

Diese Aufgaben erfordern die IB-Strategie. Besonders die letzten drei sind sehr schwierig!

KAPITEL 18

Zusätzliche Regeln für die WFL

In §16 haben wir die Grundregeln unseres Herleitungssystems für die WFL vorgestellt. In diesem Abschnitt werden wir einige zusätzliche Regeln hinzufügen. Unser erweitertes Herleitungssystem ist etwas einfacher zu handhaben. (In §20 werden wir jedoch sehen, dass die zusätzlichen Regeln streng genommen nicht notwendig sind).

18.1 Disjunktiver Syllogismus

Hier ist eine sehr natürliche Argumentationsform.

> Eli ist entweder in Dortmund oder in Bochum. Sie ist nicht in Bochum. Also ist sie in Dortmund.

Diese Form wird *disjunktiver Syllogismus* genannt. Wir fügen ihn wie folgt zu unserem Beweissystem hinzu:

m	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$	
n	$\neg\mathscr{A}$	
	$\mathscr{B}$	DS m, n

und

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \\
n & \neg\mathscr{B} & \\
 & \mathscr{A} & \text{DS } m, n
\end{array}
$$

Wie üblich können die Disjunktion und die Negation eines Disjunkts in beliebiger Reihenfolge und voneinander entfert auftreten. Wir zitieren jedoch immer zuerst die Disjunktion.

18.2 Modus Tollens

Ein weiteres nützliches Argumentationsschema wird vom folgenden Argument veranschaulicht:

> Wenn Olaf die Wahl gewonnen hat, dann residiert er im Bundeskanzleramt. Er residiert nicht im Bundeskanzleramt. Also hat er die Wahl nicht gewonnen.

Diese Argumentationsform nennt sich *Modus Tollens*. Die dementsprechende Regel lautet:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} & \\
n & \neg\mathscr{B} & \\
 & \neg\mathscr{A} & \text{MT } m, n
\end{array}
$$

Wie üblich können die Prämissen in beliebiger Reihenfolge auftreten, aber wir zitieren immer zuerst das Konditional.

18.3 Doppelnegationelimination

Eine weitere nützliche Regel ist die Doppelnegationseliminierungsregel. Sie tut genau das, was auf der Verpackung angegeben ist:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\neg\mathscr{A} & \\
 & \mathscr{A} & \text{DNE } m
\end{array}
$$

Die Rechtfertigung für diese Regel ist, dass sich in der natürlichen Sprache Doppelverneinungen tendenziell aufheben. Sie sollten sich jedoch bewusst sein, dass Kontext und Betonung Sie daran hindern können. Betrachten Sie: 'Jane ist nicht *nicht* glücklich'. Man kann wohl nicht auf 'Jane ist glücklich' schließen, da der Satz so verstanden werden sollte, dass er dasselbe bedeutet wie 'Jane ist nicht *un*glücklich'. Das aber ist zumindest vereinbar mit 'Jane befindet sich in einem Zustand tiefer Gleichgültigkeit'. Wie üblich zwingt uns der Wechsel zur WFL dazu, gewisse Nuancen der deutschen Sprache auf dem Altar der formalen Präzision zu opfern.

18.4 Ausgeschlossenes Drittes

Nehmen wir an, wir können zeigen, dass, wenn es draußen sonnig ist, Bill einen Schirm mitgebracht hat (aus Angst, sich einen Sonnenbrand einzufangen). Nehmen wir an, wir können auch zeigen, dass Bill einen Schirm mitgebracht hat, wenn es draußen nicht sonnig ist (aus Angst vor Regen). Es gibt keine dritte Möglichkeit, wie das Wetter sein könnte. Also gilt: *welches Wetter auch immer wir kriegen*, Bill wird einen Regenschirm mitgebracht haben.

Diese Denkweise motiviert die folgende Regel

$$\begin{array}{l|l}
i & \quad \mathscr{A} \\
j & \quad \mathscr{B} \\
k & \quad \neg\mathscr{A} \\
l & \quad \mathscr{B} \\
 & \mathscr{B} \qquad \text{GAD } i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}$$

Die Regel wird manchmal als das Gesetz des *ausgeschlossenen Dritten* bezeichnet, da sie die Idee verkörpert, dass $\mathscr{A}$ wahr ist oder $\neg\mathscr{A}$ wahr ist, aber es keinen dritten Weg gibt, nach dem beides nicht wahr ist.[1] Wie üblich können beliebig viele Zeilen zwischen i und j liegen, und beliebig viele Zeilen zwischen k und l liegen. Außerdem können die Unterbeweise in beliebiger Reihenfolge auftreten, und der zweite Unterbeweis muss nicht unmittelbar auf den ersten folgen. Um die Regel in Aktion zu sehen, betrachten Sie:

$$P \therefore (P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$$

Hier ist ein Beweis, der dem Argument entspricht:

[1] Man kann manchmal Logiker*innen oder Philosoph*innen finden, die vom “tertium non datur” sprechen. Das ist dasselbe Prinzip wie das des ausgeschlossenen Dritten; es bedeutet “kein Drittes ist gegeben”. Logiker*innen, die Bedenken gegen indirekte Beweise haben, haben auch Bedenken gegen diese Prinzip.

1	P	
2	$\quad D$	
3	$\quad P \wedge D$	$\wedge$I 1, 2
4	$\quad (P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	$\vee$I 3
5	$\quad \neg D$	
6	$\quad P \wedge \neg D$	$\wedge$I 1, 5
7	$\quad (P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	$\vee$I 6
8	$(P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	GAD 2–4, 5–7

Ein weiteres Beispiel:

1	$A \to \neg A$	
2	$\quad A$	
3	$\quad \neg A$	$\to$E 1, 2
4	$\quad \neg A$	
5	$\quad \neg A$	R 4
6	$\neg A$	GAD 2–3, 4–5

18.5 De Morgansche Regeln

Unsere letzten zusätzlichen Regeln heißen De Morgansche Regeln (benannt nach Augustus De Morgan). Die Form der Regeln sollte aus Wahrheitstabellen bekannt sein.

Die erste De Morgansche Regel lautet:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \\
 & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m
\end{array}
$$

Die zweite De Morgansche Regel vertauscht Prämisse und Schlussfolgerung der ersten:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \\
 & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \text{DeM } m
\end{array}
$$

Die dritte De Morgansche Regel ist der *Dual* der ersten:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) & \\
 & \neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m
\end{array}
$$

Und die vierte Regel vertauscht Prämisse und Schlussfolgerung der dritten:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B} & \\
 & \neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) & \text{DeM } m
\end{array}
$$

Dies sind alle zusätzlichen Regeln unseres Herleitungssystem für die WFL.

Übungen

A. Bei den folgenden Beweisen fehlen die Zitate (Regeln und Zeilennummern). Fügen Sie sie dort hinzu, wo sie benötigt werden:

1.

$$\begin{array}{r|l}
1 & W \to \neg B \\
2 & A \wedge W \\
3 & B \vee (J \wedge K) \\
\hline
4 & W \\
5 & \neg B \\
6 & J \wedge K \\
7 & K
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r|l}
1 & L \leftrightarrow \neg O \\
2 & L \vee \neg O \\
\hline
3 & \quad \begin{array}{|l} \neg L \\ \hline \end{array} \\
4 & \quad \begin{array}{|l} \neg O \end{array} \\
5 & \quad \begin{array}{|l} L \end{array} \\
6 & \quad \begin{array}{|l} \bot \end{array} \\
7 & \neg\neg L \\
8 & L
\end{array}$$

3.

$$
\begin{array}{rl}
1 & \mid Z \rightarrow (C \land \neg N) \\
2 & \mid \underline{\neg Z \rightarrow (N \land \neg C)} \\
3 & \mid \mid \underline{\neg(N \lor C)} \\
4 & \mid \mid \neg N \land \neg C \\
5 & \mid \mid \neg N \\
6 & \mid \mid \neg C \\
7 & \mid \mid \mid \underline{Z} \\
8 & \mid \mid \mid C \land \neg N \\
9 & \mid \mid \mid C \\
10 & \mid \mid \mid \bot \\
11 & \mid \mid \neg Z \\
12 & \mid \mid N \land \neg C \\
13 & \mid \mid N \\
14 & \mid \mid \bot \\
15 & \mid \neg\neg(N \lor C) \\
16 & \mid N \lor C
\end{array}
$$

B. Geben Sie für jedes dieser Argumente einen Beweis an:

1. $E \lor F,\ F \lor G,\ \neg F \therefore E \land G$
2. $M \lor (N \rightarrow M) \therefore \neg M \rightarrow \neg N$
3. $(M \lor N) \land (O \lor P),\ N \rightarrow P,\ \neg P \therefore M \land O$
4. $(X \land Y) \lor (X \land Z),\ \neg(X \land D),\ D \lor M \therefore M$

KAPITEL 19

Beweistheoretische Begriffe

In diesem Kapitel führen wir einige neue Begriffe ein.

Der folgende Ausdruck:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$$

bedeutet, dass es einen Beweis gibt, der mit $\mathscr{C}$ endet und dessen Prämissen $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ umfassen. Wenn wir sagen wollen, dass es *nicht* der Fall ist, dass es einen Beweis gibt, der mit $\mathscr{C}$ endet und $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …, $\mathscr{A}_n$ beginnt, dann schreiben wir:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \nvdash \mathscr{C}$$

Das Symbol '$\vdash$' nennen wir das *einfache Drehkreuz*. Dieses Symbol darf nicht mit dem doppelten Drehkreuz-Symbol ('$\vDash$') verwechselt werden. Das letztere Symbol führten wir in Kapitel 12 ein, um die Folgebeziehung zu symbolisieren. Das einfache Drehkreuz, '$\vdash$', betrifft die Existenz eines Beweises; das doppelte Drehkreuz, '$\vDash$', die Existenz von Bewertungen (oder, wenn wir es in der LEO verwenden, die Existenz von Interpretationen). *Das einfache und doppelte Drehkreuz sind unterschiedliche Begriffe.*

Bewaffnet mit unserem '$\vdash$'-Symbol können wir noch weitere Begriffe einführen. Um zu sagen, dass es einen Beweis für $\mathscr{A}$ gibt, ohne Prämissen, schreiben wir: $\vdash \mathscr{A}$. In diesem Fall sagen wir, dass $\mathscr{A}$ ein THEOREM ist.

> $\mathscr{A}$ ist ein THEOREM genau dann, wenn $\vdash \mathscr{A}$

Um dies zu veranschaulichen, nehmen wir an, wir wollen zeigen, dass '$\neg(A \wedge \neg A)$' ein Theorem ist. Wir brauchen also einen Beweis für '$\neg(A \wedge \neg A)$', der *keine* Prämissen hat. Da wir einen Satz beweisen wollen, dessen Hauptjunktor eine Negation ist, beginnen wir mit einem *Unterbeweis*, innerhalb dessen wir '$A \wedge \neg A$' annehmen und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Alles in allem sieht der Beweis also wie folgt aus:

1	$\quad\mid\ \underline{A \wedge \neg A}$	
2	$\quad\mid\ A$	$\wedge$E 1
3	$\quad\mid\ \neg A$	$\wedge$E 1
4	$\quad\mid\ \bot$	$\neg$E 3, 2
5	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg$I 1–4

Hiermit haben wir '$\neg(A \wedge \neg A)$' ohne Prämissen hergeleitet (obwohl wir natürlich eine getilgte Anname genutzt haben). Dieses Theorem ist ein Beispiel für das, was manchmal *das Gesetz des Nicht-Widersprechens* genannt wird.

Um zu zeigen, dass ein Satz ein Theorem ist, muss man nur einen geeigneten Beweis finden. Es ist normalerweise viel schwieriger zu zeigen, dass etwas *kein* Theorem ist. Dazu müsste man nicht nur zeigen, dass bestimmte Beweisstrategien versagen, sondern auch, dass kein Beweis möglich ist. Selbst wenn Sie beim Versuch, einen Satz auf tausend verschiedene Arten zu beweisen, scheitern, ist der Beweis vielleicht einfach zu lang und zu komplex, als dass Sie ihn verstehen könnten. Oder vielleicht haben Sie sich einfach nicht genug angestrengt.

Hier ist ein weiterer nützlicher Begriff:

Zwei Sätze $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ sind BEWEISBAR ÄQUIVALENT genau dann, wenn jeder vom jeweils anderen hergeleitet werden kann; d.h. es gilt sowohl $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ als auch $\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$.

Wie im Falle von Theoremen, ist es relativ einfach zu zeigen, dass zwei Sätze beweisbar äquivalent sind: es bedarf lediglich zweier Beweise. Aber zu zeigen, dass Sätze *nicht* beweisbar äquivalent sind, ist viel schwieriger: es ist genauso schwierig wie zu zeigen, dass ein Satz kein Theorem ist.

Hier ist ein dritter, verwandter Begriff:

Die Sätze $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ sind BEWEISBAR INKONSISTENT genau dann, wenn man von ihnen einen Widerspruch herleiten kann, d.h., $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \bot$. Wenn diese Sätze nicht BEWEISBAR INKONSISTENT sind, dann nennen wir sie BEWEISBAR KONSISTENT.

Es ist leicht zu zeigen, dass einige Sätze beweisbar inkonsistent sind: Man muss nur einen Widerspruch als Resultat der Annahme dieser Sätze beweisen können. Zu zeigen, dass einige Sätze nicht beweisbar inkonsistent sind, ist viel schwieriger. Es erfordert mehr, als nur den einen oder anderen Beweis zu erbringen; es erfordert, dass kein Beweis einer bestimmten Art gegeben werden kann.

Die folgende Tabelle fasst zusammen, ob ein oder zwei Beweise ausreichen, oder ob wir über alle möglichen Beweise nachdenken müssen.

	Yes	**No**
Theorem?	ein Beweis	alle möglichen Beweise
Inkonsistent?	ein Beweis	alle möglichen Beweise
Äquivalent?	zwei Beweise	alle möglichen Beweise
Konsistent?	alle möglichen Beweise	ein Beweis

Übungen

A. Zeigen Sie, dass jeder der folgenden Sätze ein Theorem ist:

1. $O \to O$
2. $N \vee \neg N$
3. $J \leftrightarrow [J \vee (L \wedge \neg L)]$
4. $((A \to B) \to A) \to A$

B. Geben Sie Beweise an, um die folgenden Dinge zu zeigen:

1. $C \to (E \wedge G), \neg C \to G \vdash G$
2. $M \wedge (\neg N \to \neg M) \vdash (N \wedge M) \vee \neg M$
3. $(Z \wedge K) \leftrightarrow (Y \wedge M), D \wedge (D \to M) \vdash Y \to Z$
4. $(W \vee X) \vee (Y \vee Z), X \to Y, \neg Z \vdash W \vee Y$

C. Zeigen Sie, dass jedes der folgenden Satzpaare beweisbar äquivalent ist:

1. $R \leftrightarrow E$, $E \leftrightarrow R$
2. G, $\neg\neg\neg\neg G$
3. $T \to S$, $\neg S \to \neg T$
4. $U \to I$, $\neg(U \wedge \neg I)$
5. $\neg(C \to D), C \wedge \neg D$
6. $\neg G \leftrightarrow H$, $\neg(G \leftrightarrow H)$

D. Wenn Sie wissen, dass $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, was können Sie zu $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B}$ sagen? Und was zu $(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B}$? Begründen Sie Ihre Antworten.

E. In diesem Kapitel haben wir behauptet, dass es ebenso schwer ist, zu zeigen, dass zwei Sätze nicht beweisbar äquivalent sind, wie zu zeigen, dass ein Satz kein Theorem ist. Warum haben wir dies behauptet? (*Hinweis*: Stellen Sie sich einen Satz vor, der ein Theorem wäre, genau dann, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beweisbar äquivalent wären).

KAPITEL 20

Abgeleitete Regeln

In diesem Kapitel werden wir sehen, warum wir die Regeln unseres Herleitungssystems in zwei Abschnitten eingeführt haben. Insbesondere wollen wir zeigen, dass die zusätzlichen Regeln von §18 streng genommen nicht notwendig sind, sondern aus den Grundregeln von §16 abgeleitet werden können.

20.1 Herleitung der Wiederholungsregel

Um zu veranschaulichen, was es bedeutet, eine *Regel* aus anderen Regeln abzuleiten, betrachten Sie zunächst die Wiederholungsregel. Diese ist eine Grundregel unseres Systems, aber sie ist eigentlich nicht notwendig. Um dies zu sehen, nehmen Sie an, dass Sie einen Satz auf einer Zeile Ihres Beweises haben:

$$\begin{array}{r|l} m & \mathscr{A} \end{array}$$

Sie wollen sich jetzt wiederholen, in irgendeiner Zeile k. Sie könnten sich einfach auf die Regel R berufen. Aber genauso gut könnten Sie sich auch auf andere Grundregeln in §16 berufen:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ k & \mathscr{A} \wedge \mathscr{A} & \wedge\mathrm{I}\ m, m \\ k+1 & \mathscr{A} & \wedge\mathrm{E}\ k \end{array}$$

Um es klar zu sagen: Dies ist kein Beweis. Vielmehr ist es ein Beweis*schema*. Schließlich verwendet es eine Variable, '$\mathscr{A}$', anstatt eines Satzes der WFL. Aber der Punkt ist einfach: Egal welche Sätze der WFL wir für '$\mathscr{A}$' ersetzen, und egal in welchen Zeilen wir arbeiten, wir können einen Beweis erbringen, der der obigen Form entspricht. Man kann sich unser Beweisschema also als ein Rezept für das Herstellen von Beweisen vorstellen.

In der Tat ist es ein Rezept, das uns folgendes zeigt: Alles, was wir mit der Regel R beweisen können, können wir (mit einer weiteren Zeile) allein mit den Grundregeln in §16, ohne R, beweisen. Das bedeutet, dass die Regel R aus den anderen Grundregeln abgeleitet werden kann: Alles, was wir mit R rechtfertigen können, können wir auch nur mit den anderen Grundregeln rechtfertigen.

20.2 Ableitung des disjunktiven Syllogismus

Nehmen Sie an, Sie befinden sich in einem Beweis und sie stoßen auf das folgende:

m	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
n	$\neg\mathscr{A}$

Sie wollen jetzt, in der Zeile k, $\mathscr{B}$ beweisen. Sie können dies mit der Regel DS tun, die wir in §18 eingeführt haben. Aber ebenso gut können Sie dies mit den Grundregeln in §16 tun:

$$
\begin{array}{l|l|l}
m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \\
n & \neg\mathscr{A} & \\
k & \quad \mathscr{A} & \\
k+1 & \quad \bot & \neg\text{E } n,\ k \\
k+2 & \quad \mathscr{B} & \text{X } k+1 \\
k+3 & \quad \mathscr{B} & \\
k+4 & \quad \mathscr{B} & \text{R } k+3 \\
k+5 & \mathscr{B} & \lor\text{E } m,\ k\text{–}k+2,\ k+3\text{–}k+4
\end{array}
$$

Die DS-Regel kann also wiederum aus unseren Grundregeln abgeleitet werden. Ihre Aufnahme in unser System ermöglicht uns keine neuen Beweise. Jedes Mal, wenn Sie die DS-Regel verwenden, könnten Sie auch ein paar Zeilen mehr nutzen und dasselbe nur mittels unserer Grundregeln beweisen. Daher ist die DS-Regel eine *abgeleitete* Regel.

20.3 Ableitung des Modus Tollens

Nehmen Sie an, Sie finden das folgende in Ihrem Beweis:

$$
\begin{array}{l|l}
m & \mathscr{A} \to \mathscr{B} \\
n & \neg\mathscr{B}
\end{array}
$$

Sie wollen jetzt, in Zeile k, $\neg\mathscr{A}$ beweisen. Sie können dies mit der MT-Regel tun, die wir in §18 eingeführt haben. Genauso gut können Sie dies allerdings auch mit den Grundregeln in §16 tun:

m	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	
n	$\neg\mathscr{B}$	
k	$\quad \mathscr{A}$	
$k+1$	$\quad \mathscr{B}$	$\to$E m, k
$k+2$	$\quad \bot$	$\neg$E n, $k+1$
$k+3$	$\neg\mathscr{A}$	$\neg$I k–$k+2$

Die MT-Regel kann also von den Grundregeln unseres Herleitungssystems abgeleitet werden.

20.4 Ableitung der Doppelnegationseliminationsregel

Betrachten Sie das folgende Beweisschema:

m	$\neg\neg\mathscr{A}$	
k	$\quad \neg\mathscr{A}$	
$k+1$	$\quad \bot$	$\neg$E m, k
$k+2$	$\mathscr{A}$	IB k–$k+1$

Dies zeigt, dass wir die Doppelnegationseliminationsregel von den Grundregeln unseres Herleitungssystems ableiten können.

20.5 Ableitung des ausgeschlossenen Dritten

Angenommen, Sie wollen etwas mit der GAD-Regel beweisen, d.h. Sie haben in Ihrem Beweis:

$$
\begin{array}{l|l}
m & \quad | \; \mathscr{A} \\
n & \quad | \; \mathscr{B} \\
k & \quad | \; \neg\mathscr{A} \\
l & \quad | \; \mathscr{B}
\end{array}
$$

Sie wollen jetzt, in Zeile $l+1$, $\mathscr{B}$ herleiten. Die Regel GAD in §18 würde es Ihnen erlauben, dies zu tun. Aber können Sie dies auch mit den Grundregeln unseres Herleitungssystems tun?

Eine Möglichkeit ist, zuerst zu beweisen, dass $\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{A}$, und dann $\vee$E anzuwenden:

$$
\begin{array}{l|ll}
m & \quad | \; \mathscr{A} & \\
n & \quad | \; \mathscr{B} & \\
k & \quad | \; \neg\mathscr{A} & \\
l & \quad | \; \mathscr{B} & \\
 & \vdots & \\
i & \mathscr{A} \vee \neg\mathscr{A} & \\
i+1 & \mathscr{B} & \vee\text{E } i,\ m\text{–}n,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

(Wir gaben einen Beweis für $\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{A}$ nur mit unseren Grundregeln in §17.6).

Hier ist ein anderer Weg, der etwas komplizierter als die vorherigen ist. Was Sie tun müssen, ist, Ihre beiden Unterbeweise in einen anderen Unterbeweis einzubetten. Die Annahme des Unterbeweises ist $\neg\mathscr{B}$, und die letzte Zeile $\bot$. Der vollständige Unterbeweis erlaubt Ihnen, $\mathscr{B}$ unter Verwendung von IB herzuleiten. Innerhalb des Beweises müssten Sie allerdings etwas mehr Arbeit leisten, um $\bot$ zu erhalten:

$$
\begin{array}{l|l|l}
m & \quad \neg\mathscr{B} & \\
m+1 & \qquad \mathscr{A} & \\
 & \qquad \vdots & \\
n & \qquad \mathscr{B} & \\
n+1 & \qquad \bot & \neg\mathrm{E}\ m, n \\
n+2 & \qquad \neg\mathscr{A} & \\
 & \qquad \vdots & \\
l & \qquad \mathscr{B} & \\
l+1 & \qquad \bot & \neg\mathrm{E}\ m, l \\
l+2 & \quad \neg\mathscr{A} & \neg\mathrm{I}\ (m+1)\text{–}(n+1) \\
l+3 & \quad \neg\neg\mathscr{A} & \neg\mathrm{I}\ (n+2)\text{–}(l+1) \\
l+4 & \quad \bot & \neg\mathrm{E}\ l+3, l+2 \\
l+5 & \mathscr{B} & \mathrm{IB}\ m\text{–}(l+4)
\end{array}
$$

Beachten Sie, dass sich die Zeilennummern ändern, da wir oben eine Annahme, sowie zusätzliche Schlussfolgerungen innerhalb der Unterbeweise, hinzufügen. Es könnte sein, dass Sie eine Weile auf diesen Beweis starren müssen, bevor Sie verstehen, was hier vonstatten geht.

20.6 Ableitung der De Morganschen Regeln

Hier ist eine Demonstration, wie wir die erste De Morgansche Regel ableiten können:

m	$\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$	
k	$\mid\ \mathscr{A}$	
$k+1$	$\mid\ \mid\ \mathscr{B}$	
$k+2$	$\mid\ \mid\ \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	$\wedge$I k, $k+1$
$k+3$	$\mid\ \mid\ \bot$	$\neg$E m, $k+2$
$k+4$	$\mid\ \neg\mathscr{B}$	$\neg$I $k+1$–$k+3$
$k+5$	$\mid\ \neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$	$\vee$I $k+4$
$k+6$	$\mid\ \neg\mathscr{A}$	
$k+7$	$\mid\ \neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$	$\vee$I $k+6$
$k+8$	$\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$	GAD k–$k+5$, $k+6$–$k+7$

Hier ist eine Demonstration, wie wir die zweite De Morgansche Regel ableiten können:

m	$\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$	
k	$\mid\ \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	
$k+1$	$\mid\ \mathscr{A}$	$\wedge$E k
$k+2$	$\mid\ \mathscr{B}$	$\wedge$E k
$k+3$	$\mid\ \mid\ \neg\mathscr{A}$	
$k+4$	$\mid\ \mid\ \bot$	$\neg$E $k+3$, $k+1$
$k+5$	$\mid\ \mid\ \neg\mathscr{B}$	
$k+6$	$\mid\ \mid\ \bot$	$\neg$E $k+5$, $k+2$
$k+7$	$\mid\ \bot$	$\vee$E m, $k+3$–$k+4$, $k+5$–$k+6$
$k+8$	$\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$	$\neg$I k–$k+7$

Ähnliche Demonstrationen erklären, wie wir die dritte und vierte De Morgansche Regel von unseren Grundregeln ableiten können. Diese werden Ihnen aber als Übung überlassen.

Übungen

A. Geben Sie Beweisschemata an, die die Hinzufügung der dritten und vierten De Morganschen Regeln als abgeleitete Regeln rechtfertigen.

B. Die Beweise, die Sie zu den Übungen in §§18–19 erstellt haben, nutzten abgeleitete Regeln. Ersetzen Sie die abgeleiteten Regeln in diesen Beweisen mit Grundregeln. Sie werden in den resultierenden Beweisen einige Wiederholungen finden; in solchen Fällen, bieten Sie einen eleganteren Beweis an, der nur Grundregeln verwendet. (Dadurch erhalten Sie ein Gefühl sowohl für die Kraft der abgeleiteten Regeln als auch für das Zusammenspiel aller Regeln).

C. Beweisen Sie $\mathcal{A} \lor \neg\mathcal{A}$. Dann geben Sie einen Beweis für diesen Satz, der *nur die Grundregeln verwendet.*

D. Zeigen Sie, dass Sie, wenn Sie GAD als Grundregel hätten, IB als abgeleitete Regel rechtfertigen können. Das heißt, nehmen wir an, Sie hätten den Beweis:

$$
\begin{array}{l|l|l}
m & & \neg\mathcal{A} \\
\cline{3-3}
 & & \dots \\
n & & \bot
\end{array}
$$

Wie könnten Sie GAD verwenden, um $\mathcal{A}$ ohne die Verwendung von IB, aber mit GAD und allen anderen Grundregeln, herzuleiten?

E. Geben Sie einen Beweis für die erste De Morgansche Regel, der nur die Grundregeln verwendet, und insbesondere *ohne GAD* auskommt. (Natürlich können Sie den Beweis mit GAD mit dem Beweis *von* GAD kombinieren. Versuchen Sie jedoch auch, auf andere Art einen Beweis zu finden).

KAPITEL 21

Korrektheit und Vollständigkeit

In §19 haben wir gesehen, dass wir Beweise zu ähnlichen Zwecken wie Wahrheitstabellen verwenden können. Wir konnten Beweise nicht nur verwenden, um zu beweisen, dass ein Argument gültig ist, sondern auch, um zu testen, ob ein Satz eine Tautologie ist, oder, ob ein Satzpaar äquivalent ist. Wir begannen auch, das einfache Drehkreuz auf die gleiche Weise wie das doppelte Drehkreuz zu verwenden. Wenn wir mit einer Wahrheitstabelle beweisen konnten, dass $\mathscr{A}$ eine Tautologie ist, schrieben wir $\vDash \mathscr{A}$, und wenn wir es mit einer Ableitung beweisen konnten, schrieben wir $\vdash \mathscr{A}$.

Vielleicht haben Sie sich an diesem Punkt gefragt, ob die beiden Drehkreuze immer auf die gleiche Weise funktionieren. Wenn Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen zeigen können, dass $\mathscr{A}$ eine Tautologie ist, können Sie dann auch immer mittels eines Beweises zeigen, dass es sich bei diesem Satz um ein Theorem handelt? Ist die Rückrichtung auch der Fall? Trifft dies auch auf gültige Argumente und Paare von äquivalenten Sätzen zu? Wie sich herausstellt, lautet die Antwort auf all diese Fragen und noch viele andere ähnliche Fragen: Ja. Wir können dies zeigen, indem wir all diese Begriffe einzeln definieren und sie dann als äquivalent beweisen. Das heißt, wir stellen uns vor, dass wir tatsächlich zwei Gültigkeitsbegriffe haben, nämlich gültig$_{\vDash}$ und gültig$_{\vdash}$, und zeigen dann, dass die beiden Begriffe immer gleich funktionieren.

Zu Beginn müssen wir alle unsere logischen Begriffe getrennt für Wahrheitstabellen und Beweise definieren. Vieles von dieser Arbeit haben wir bereits getan. Wir haben alle Wahrheitstabellen-Definitionen in §12 behandelt. Wir haben auch bereits syntaktische, beweistheoretische Definitionen von Tautologien (Theoreme) und Paaren äquivalenter Sätze gegeben. Die anderen Definitionen folgen natürlich. Für die meisten logischen Begriffe können wir einen Test mittels Beweisen entwickeln, und diejenigen, auf die wir nicht direkt testen können, können durch Begriffe definiert werden, auf die wir testen können.

Beispielsweise haben wir ein Theorem als einen Satz definiert, der ohne Prämissen abgeleitet werden kann (179). Da die Negation eines Widerspruchs eine Tautologie ist, können wir einen BEWEISBAREN WIDERSPRUCH DER WFL als einen Satz definieren, dessen Negation ohne Prämissen abgeleitet werden kann. Die syntaktische, beweistheoretische Definition eines kontingenten Satzes ist ein wenig anders. Wir haben keine praktische, endliche Methode, um mit Herleitungen zu beweisen, dass ein Satz kontingent ist, so wie wir es mit Wahrheitstabellen getan haben. Wir müssen uns also damit begnügen, den Begriff eines kontingenten Satzes negativ zu definieren. Ein Satz ist BEWEISBAR KONTINGENT IN DER WFL genau dann, wenn es sich bei ihm weder um ein Theorem noch einen Widerspruch handelt.

Eine Menge an Sätzen ist BEWEISBAR INKONSISTENT IN DER WFL genau dann, wenn man von ihnen einen Widerspruch herleiten kann. Konsistenz dagegen ist wie die Kontingenz. Wir haben keine praktische, endliche Methode, um mit Herleitungen zu beweisen, dass eine Menge an Sätzen konsistent ist. Auch hier müssen wir unseren Begriff also negativ definieren. Eine Menge an Sätzen ist BEWEISBAR KONSISTENT IN DER WFL genau dann, wenn sie nicht beweisbar inkonsistent ist.

Schließlich ist ein Argument in der WFL BEWEISBAR GÜLTIG genau dann, wenn es eine Ableitung dessen Schlussfolgerung von dessen Prämissen gibt. Alle diese Definitionen sind in Tabelle 21.1. aufgeführt.

Alle unsere Konzepte sind jetzt sowohl semantisch als auch

Concept	**Wahrheitstabellendefinition (Semantisch)**	**Beweistheoretische Definition (Syntaktisch)**
Tautologie	Ein Satz, dessen Wahrheitstabelle nur Ts in der Spalte unter seinem Hauptjunktor hat	Ein Satz, der ohne Prämissen hergeleitet werden kann
Widerspruch	Ein Satz, dessen Wahrheitstabelle nur Fs in der Spalte unter seinem Hauptjunktor hat	Ein Satz, dessen Negation ohne Prämissen hergeleitet werden kann
kontingenter Satz	Ein Satz, dessen Wahrheitstabelle sowohl Ts als auch Fs in der Spalte unter seinem Hauptjunktor hat	Ein Satz, der weder ein Theorem noch ein Widerspruch ist
Äquivalente Sätze	Die Spalten unter den Hauptjunktoren sind identisch	Die Sätze können voneinander hergeleitet werden
gemeinsam unmögliche/ inkonsistente Sätze	Sätze, die keine einzige Zeile in ihrer Wahrheitstabelle haben, in der sie alle wahr sind	Sätze, aus denen man einen Widerspruch herleiten kann
gemeinsam mögliche/ konsistente Sätze	Sätze, die zumindest eine Zeile in ihrer Wahrheitstabelle haben, in der sie alle wahr sind	Sätze, aus denen man keinen Widerspruch herleiten kann
gültiges Argument	Ein Argument, dessen Wahrheitstabelle keine Zeile hat, in der nur Ts unter den Hauptjunktoren der Prämissen und mindestens ein F unter dem Hauptjunktor der Schlussfolgerung stehen	Ein Argument, dessen Schlussfolgerung man von dessen Prämissen herleiten kann

Tabelle 21.1: Zwei Wege logische Begriffe zu definieren

syntaktisch definiert. Wie können wir beweisen, dass diese Definitionen immer gleich funktionieren? Ein vollständiger Beweis geht weit über den Rahmen dieses Lehrbuchs hinaus. Wir können jedoch skizzieren, wie er aussehen würde. Wir werden uns darauf konzentrieren, zu zeigen, dass die beiden Gültigkeitsbegriffe äquivalent sind. Daraus folgt die Äquivalenz der anderen Begriffe recht schnell. Der Beweis wird in zwei Richtungen laufen. Zunächst werden wir zeigen, dass Dinge, die syntaktisch gültig sind, auch semantisch gültig sind. Mit anderen Worten: Alles, was wir mit Herleitungen beweisen können, könnten wir auch mit Wahrheitstabellen beweisen. In Symbolen: wir wollen zeigen, dass gültig$_{\vdash}$ gültig$_{\vDash}$ zur Folge hat. Danach müssen wir in die anderen Richtung laufen und zeigen, dass gültig$_{\vDash}$ gültig$_{\vdash}$ zur Folge hat.

Dieses Argument von $\vdash$ nach $\vDash$ ist das Problem der KORREKTHEIT. Ein Herleitungssystem ist KORREKT wenn es keine Herleitungen zulässt, die in Wahrheitstabellen ungültig sind. Um zu zeigen, dass unser Herleitungssystem korrekt ist, müssten wir zeigen, dass *jeder* mögliche Beweis der Beweis eines gültigen Arguments ist. Es würde nicht ausreichen, viele gültige Argumente erfolgreich zu beweisen und viele ungültige Argumente nicht zu beweisen.

Der Beweis, den wir skizzieren werden, hängt von der Tatsache ab, dass wir einen Satz der WFL unter Verwendung einer induktiven Definition definiert haben (siehe 53). Wir hätten auch induktive Definitionen verwenden können, um einen korrekten Beweis der WFL und eine korrekte Wahrheitstabelle zu definieren. Wenn wir diese Definitionen hätten, könnten wir einen induktiven Beweis verwenden, um die Korrektheit der WFL zu zeigen.

Ein induktiver Beweis funktioniert auf dieselbe Weise wie eine induktive Definition. Mit der induktiven Definition identifizierten wir eine Gruppe von Basiselementen, die als Beispiele für das, was wir zu definieren versuchten, festgelegt wurden. Im Falle eines WFL-Satzes waren die Satzbuchstaben A, B, C, ... die Basiselemente. Wir gaben bekannt, dass dies Sätze sind. Der zweite Schritt einer induktiven Definition besteht darin, zu sagen, dass alles, was aus diesen Basiselemente nach bestimmten Regeln aufgebaut wird, auch als Beispiel für das, was wir definieren, gilt. Im Falle einer Definition eines Satzes entsprachen die Regeln den fünf Junktoren (siehe S. 53). Sobald Sie eine induktive Definition haben, können Sie diese Definition verwenden, um zu zeigen, dass alle Mitglieder der von Ihnen definierten Kategorie eine bestimmte Eigenschaft haben. Sie beweisen einfach, dass die Basiselemente in diese Kategorie fallen. Dann beweisen Sie, dass die Regeln für die Erweiterung der Basisklasse nicht ändern, ob Dinge in die relevante Kategorie fallen. Das genügt, um einen induktiven Beweis zu erbringen.

Auch wenn wir in der WFL keine induktive Definition eines Beweises haben, können wir skizzieren, wie ein induktiver Beweis für die Korrektheit der WFL aussehen würde. Stellen Sie sich eine Basisklasse von einzeiligen Beweisen vor, einen für jede unserer elf Regeln. Die Mitglieder dieser Klasse würden wie folgt aussehen: $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$; $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$; $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \neg\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ .... Da einige Regeln ein paar verschiedene Formen haben, müssten wir dieser Basisklasse einige Elemente hinzufügen, z.B. $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{B}$. Beachten Sie, dass dies alles Aussagen in der Metasprache sind. Der Beweis, dass die WFL korrekt ist, ist nicht Teil der WFL, weil die WFL keine Aussagen über sich selbst treffen kann.

Sie können Wahrheitstabellen verwenden, um zu beweisen, dass jeder dieser einzeiligen Beweise in dieser Basisklasse gültig$_{\vDash}$ ist. Der Beweis $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ entspricht z.B. einer Wahrheitstabelle, welche zeigt, dass $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vDash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$. Dies ist der ersten Schritt unseres induktiven Beweises.

Der nächste Schritt besteht darin zu zeigen, dass das Hinzufügen von Zeilen zu einem Beweis niemals einen gültigen$_{\vDash}$ Beweis in einen ungültigen$_{\vDash}$ Beweis verwandelt. Wir müssten dies für jede unserer elf Regeln zeigen. So müssen wir zum Beispiel für $\wedge$I zeigen, dass ein gültiger Beweis $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$ durch das Hinzufügen einer Zeile, in der wir $\wedge$I verwenden, um $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ herzuleiten (wobei $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ aus $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n, \mathscr{B}$ hergeleitet werden können), nicht in einen *un*gültigen Beweis verwandeln.

Aber warten Sie! Wenn wir $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ aus diesen Prämissen herleiten können, dann müssen $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ bereits im Beweis vorhanden sein. Sie befinden sich entweder bereits unter $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, $\mathscr{B}$ oder können aus ihnen hergeleitet werden. Als solche muss jede Zeile der Wahrheitstabelle, in der die Prämissen wahr sind, eine Zeile der Wahrheitstabelle sein, in der $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ wahr sind. Gemäss der charakteristischen Wahrheitstabelle für $\wedge$bedeutet dies, dass $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ in dieser Zeile auch wahr sind. Daher gilt, dass $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ aus den Prämissen folgt. Das bedeutet, dass die Anwendung der $\wedge$E-Regel zur Erweiterung eines gültigen Beweises einen weiteren gültigen Beweis ergibt.

Um zu zeigen, dass das Herleitungssystem korrekt ist, müssten wir ähnliche Dinge auch für die anderen Regeln zeigen. Da die abgeleiteten Regeln von den Grundregeln stammen, reicht es aus, ähnliche Argumente für die elf anderen Grundregeln zu liefern. Diese mühsame Übung sprengt allerdings den Rahmen dieses Buches.

Wir haben also gezeigt (bzw. angedeutet), dass $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ tatsächlich $\mathscr{A} \vDash \mathscr{B}$ zur Folge hat. Wie steht es um die andere Richtung? Wieso sollten wir annehmen, dass jedes Argument, das sich mit Wahrheitstabellen als korrekt erweisen lässt, auch mit einer Herleitung beweisen lässt?

Dies ist das Problem der Vollständigkeit. Ein Herleitungssystem hat die Eigenschaft der VOLLSTÄNDIGKEIT genau dann, wenn es einen Beweis für jedes semantisch gültige Argument gibt. Nachzuweisen, dass ein logisches System vollständig ist, ist generell schwieriger als nachzuweisen, dass es korrekt ist. Der Beweis, dass ein logisches System vollständig ist, erfordert, dass wir zeigen, dass die Regeln des Herleitungssystems genau so funktionieren, wie sie sollen. Zu zeigen, dass ein logisches System vollständig ist, heißt zu zeigen, dass wir alle Regeln haben, die wir brauchen, bzw. dass wir keine Regeln außer Acht gelassen haben.

Der wichtige Punkt ist, dass unser Herleitungssystem für die WFL sowohl korrekt als auch vollständig ist. Dies ist nicht bei allen Herleitungssystemen oder allen formalen Sprachen der Fall. Weil es auf die WFL zutrifft, können wir wählen, ob wir Beweise oder Wahrheitstabellen angeben, um beispielsweise die Gültigkeit eines Arguments zu überprüfen – je nachdem, was für die vorliegende Aufgabe einfacher ist.

Jetzt, da wir wissen, dass die Wahrheitstabellenmethode mit der Herleitungsmethode ausgetauscht werden kann, können Sie wählen, welche Methode Sie für ein bestimmtes Problem verwenden wollen. Student*innen ziehen es oft vor, Wahrheitstabellen zu verwenden, weil sie rein mechanisch hergestellt werden können; dies scheint 'einfacher' zu sein. Wir haben jedoch bereits gesehen, dass Wahrheitstabellen schon nach wenigen Satzbuchstaben unvorstellbar groß werden. Andererseits gibt es ein paar Situationen, in denen die Verwendung von Beweisen einfach nicht möglich ist. Wir haben einen Kontingenzsatz syntaktisch als einen Satz definiert, von dem wir nicht beweisen können, dass er eine Tautologie oder ein Widerspruch ist. Es gibt keine praktische Möglichkeit, eine solche negative Aussage zu beweisen. Wir werden nie wissen, ob es nicht doch einen Beweis dafür gibt, dass ein Satz ein Widerspruch ist; einen Beweis, den wir einfach noch nicht gefunden haben. Wir können in dieser Situation nichts anderes tun, als auf Wahrheitstabellen zurückzugreifen. Ähnlich gilt: wir können Herleitungen verwenden, um die Äquivalenz zweier Sätze zu beweisen, aber was ist, wenn wir beweisen wollen, dass sie nicht äquivalent sind? Wir haben keine Möglichkeit, zu beweisen, dass es keine entsprechenden Beweise gibt. Wir müssen also wieder auf Wahrheitstabellen zurückgreifen.

Die Tabelle 21.2 fasst zusammen, wann es am Besten ist, Beweise zu nutzen und wann es am Besten ist, Wahrheitstabellen zu nutzen.

Übungen

A. Verwenden Sie entweder einen Beweis oder eine Wahrheitstabelle für jedes der folgenden Probleme.

1. Zeigen Sie, dass $A \rightarrow [((B \wedge C) \vee D) \rightarrow A]$ ein Theorem ist.

Logischer Begriff	**beweisen, dass er zutrifft:**	**beweisen, dass er nicht zutrifft**
Theorem	Herleiten des Satzes	Finden Sie eine Zeile mit F unter dem Hauptjunktor
Widerspruch	Herleiten der Negation des Satzes	Finden Sie eine Zeile mit T unter dem Hauptjunktor
Kontingent	Finden Sie eine Zeile mit T und eine mit F unter dem Hauptjunktor	Beweisen Sie den Satz oder seine Negation
Äquivalenz	Beweisen Sie beide Sätze vom jeweils anderen	Finden Sie eine Zeile, in der die Sätze unterschiedliche Wahrheitswerte unter dem Hauptjunktor haben
Konsistenz	Finden Sie eine Zeile, in der alle Sätze ein T unter dem Hauptjunktor haben	Leiten Sie einen Widerspruch von den Sätzen her
Gültigkeit	Leiten Sie die Schlussfolgerung von den Prämissen her	Finden Sie eine Zeile, in der die Prämissen wahr und die Schlussfolgerung falsch ist

Tabelle 21.2: Wahrheitstabelle oder Beweis?

2. Zeigen Sie, dass $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ kein Theorem ist.
3. Zeigen Sie, dass $A \rightarrow \neg A$ kein Widerspruch ist.
4. Zeigen Sie, dass $A \leftrightarrow \neg A$ ein Widerspruch ist.
5. Zeigen Sie, dass $\neg(W \rightarrow (J \vee J))$ kontingent ist.
6. Zeigen Sie, dass $\neg(X \vee (Y \vee Z)) \vee (X \vee (Y \vee Z))$ nicht kontingent ist.
7. Zeigen Sie, dass $B \rightarrow \neg S$ und $\neg\neg B \rightarrow \neg S$ äquivalent sind.
8. Zeigen Sie, dass $\neg(X \vee O)$ und $X \wedge O$ nicht äquivalent sind.
9. Zeigen Sie, dass $\neg(A \vee B)$, C und $C \rightarrow A$ gemeinsam unmöglich sind.
10. Zeigen Sie, dass $\neg(A \vee B)$, $\neg B$ und $B \rightarrow A$ gemeinsam möglich sind.
11. Zeigen Sie, dass $\neg(A \vee (B \vee C)) \therefore \neg C$ gültig ist.
12. Zeigen Sie, dass $\neg(A \wedge (B \vee C)) \therefore \neg C$ ungültig ist.

B. Verwenden Sie entweder eine Herleitung oder eine Wahrheitstabelle für jedes der folgenden Probleme.

1. Zeigen Sie, dass $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ein Theorem ist.
2. Zeigen Sie, dass $\neg(((N \leftrightarrow Q) \vee Q) \vee N)$ kein Theorem ist.
3. Zeigen Sie, dass $Z \vee (\neg Z \leftrightarrow Z)$ kontingent ist.
4. Zeigen Sie, dass $(L \leftrightarrow ((N \rightarrow N) \rightarrow L)) \vee H$ nicht kontingent ist.
5. Zeigen Sie, dass $(A \leftrightarrow A) \wedge (B \wedge \neg B)$ ein Widerspruch ist.
6. Zeigen Sie, dass $(B \leftrightarrow (C \vee B))$ kein Widerspruch ist.
7. Zeigen Sie, dass $((\neg X \leftrightarrow X) \vee X)$ und X äquivalent sind.

8. Zeigen Sie, dass $F \wedge (K \wedge R)$ nicht äquivalent zu $(F \leftrightarrow (K \leftrightarrow R))$ ist.

9. Zeigen Sie, dass $\neg(W \rightarrow W)$, $(W \leftrightarrow W) \wedge W$ und $E \vee (W \rightarrow \neg(E \wedge W))$ inkonsistent sind.

10. Zeigen Sie, dass $\neg R \vee C$, $(C \wedge R) \rightarrow \neg R$ und $(\neg(R \vee R) \rightarrow R)$ inkonsistent sind.

11. Zeigen Sie, dass $\neg\neg(C \leftrightarrow \neg C), ((G \vee C) \vee G) \therefore ((G \rightarrow C) \wedge G)$ gültig ist.

12. Zeigen Sie, dass $\neg\neg L, (C \rightarrow \neg L) \rightarrow C) \therefore \neg C$ ungültig ist.

TEIL V

Die Logik erster Ordnung

KAPITEL 22

Bausteine der LEO

22.1 Die Notwendigkeit, Sätze zu zerlegen

Lasst uns das folgende Argument betrachten, welches im Deutschen offenbar gültig ist:

Willard ist ein Logiker.
Alle Logiker*innen tragen komische Hüte.
∴ Willard trägt einen komischen Hut.

Um es in der WFL zu symbolisieren, könnten wir einen Symbolisierungsschlüssel anbieten:

L: Willard ist ein Logiker.
A: Alle Logiker*innen tragen komische Hüte.
F: Willard trägt einen komischen Hut.

Das Argument sieht dann so aus:

$$L, A \therefore F$$

Aber der Wahrheitstabellentest wird nun zeigen, dass dieses Argument *ungültig* ist. Was ist schief gelaufen?

Das Problem ist nicht, dass wir beim Symbolisieren des Arguments einen Fehler gemacht haben. Unsere Symbolisierung ist die beste Symbolisierung, die wir *in der WFL* geben können. Das Problem liegt bei der WFL selbst. Bei 'Alle Logiker*innen tragen komische Hüte' geht es sowohl um Logiker*innen als auch um das Tragen von komischen Hüten. Wenn wir diese Struktur in unserer Symbolisierung nicht beibehalten, verlieren wir den Verbindung zwischen dem Logikerdasein Willards und seinem komischen Hut.

Die Basiselemente der WFL sind Satzbuchstaben, und die WFL kann diese nicht weiter auseinandernehmen. Um Argumente wie das vorhergehende zu symbolisieren, müssen wir eine neue formale Sprache entwickeln, die es uns erlaubt, *das Atom zu spalten*. Wir werden diese Sprache die *Logik erster Ordnung* oder *LEO* nennen.

Die Einzelheiten der LEO werden wir im Laufe dieses Kapitels erläutern, aber hier sind drei Begriffe die wir für das Spalten der einfachen Sätze, die wir in der WFL mit Satzbuchstaben symbolisieren, nutzen werden.

Zuerst haben wir *Namen*. In der LEO symbolisieren wir diese mit kursiven Kleinbuchstaben. Zum Beispiel könnte 'b' für Bertie stehen, oder 'w' für Willard.

Zweitens haben wir *Prädikate*. Deutsche Prädikate sind Ausdrücke wie '_____ ist ein Hund' oder '_____ ist ein/e Logiker*in'. Dies sind an sich keine vollständigen Sätze. Um einen vollständigen Satz zu bilden, müssen wir die Lücke im Prädikat ausfüllen. Wir müssen etwas sagen wie 'Bertie ist ein Hund' oder 'Willard ist ein Logiker'. In der LEO symbolisieren wir Prädikate mit kursiven Großbuchstaben. Zum Beispiel könnten wir das LEO-Prädikat 'H' das deutsche Prädikat '_____ ist ein Hund' symbolisieren lassen. Dann wird der Ausdruck '$H(b)$' in der LEO ein Satz sein, der den deutschen Satz 'Bertie ist ein Hund' symbolisiert. Ebenso könnten wir das FOL-Prädikat 'L' das deutsche Prädikat '_____ ist ein/e Logiker*in' symbolisieren lassen. Dann wird der Ausdruck '$L(w)$' den deutschen Satz 'Willard ist ein Logiker' symbolisieren.

Drittens haben wir *Quantoren*. Zum Beispiel wird '$\exists$' grob ausdrücken: 'Es gibt zumindest einen …'. Wir könnten also den deutschen Satz 'Es gibt einen Hund' mit dem LEO-Satz '$\exists x\, H(x)$' symbolisieren, den wir als 'Es gibt zumindest ein Ding, x, und x ist ein Hund'.

22.2 Namen

Im Deutschen ist ein *singulärer Term* ein Wort oder eine Phrase, das/die sich auf eine *bestimmte* Person, einen *bestimmten* Ort oder eine *bestimmte* Sache bezieht. Das Wort 'Hund' ist kein singulärer Term, weil es sehr viele Hunde gibt, auf die sich 'Hund' bezieht. Der Ausdruck 'Bertie' hingegen ist ein singulärer Term, weil er sich auf einen *bestimmten* Terrier bezieht. Ebenso ist der Ausdruck 'Philips Hund Bertie' ein singulärer Term, weil er sich auf einen *bestimmten* Terrier bezieht.

Eigennamen sind eine besonders wichtige Art von singulären Termen. Dies sind Ausdrücke, die auf Individuen verweisen, ohne sie weiter zu beschreiben. Der Name 'Emerson' ist ein Eigenname, und der Name allein sagt noch nichts über Emerson aus. Natürlich werden einige Namen traditionell an Jungen und andere an Mädchen vergeben. Wenn 'Hilary' als singulärer Term verwendet wird, könnte man vermuten, dass er sich auf eine Frau bezieht. Damit kann man aber auch falsch liegen. Tatsächlich weist der Name nicht einmal notwendigerweise darauf hin, dass das Individuum, auf das verwiesen wird, überhaupt eine Person ist: Hilary könnte auch eine Giraffe sein.

In der LEO sind unsere NAMEN kursive Kleinbuchstaben 'a' bis 'r'. Wir können Subskripte hinzufügen, wenn wir einen Buchstaben mehr als einmal verwenden wollen. Hier sind also einige singulärer Terme der LEO:

$$a, b, c, \ldots, r, a_1, f_{32}, j_{390}, m_{12}$$

Diese sollten wie die Eigennamen im Deutschen verstanden werden, aber mit einem Unterschied. 'Tim Button' ist ein Eigenname, aber es gibt mehrere Personen mit diesem Namen. (Gleichermaßen gibt es mindestens zwei Personen mit dem Namen 'P.D. Magnus'.) Wir leben mit dieser Art von Zweideutigkeit im Deutschen, da das Deutsche zulässt, dass der Kontext dafür zuständig ist, dass sich 'Tim Button' auf einen Autor dieses Buches bezieht und nicht auf ein anderes Individuum, das ebenfalls 'Tim Button' heißt. In der LEO allerdings tolerieren wir eine solche

Zweideutigkeit nicht. Jeder Name muss auf *genau* ein Individuum verweisen. (Zwei verschiedene Namen können jedoch auf dasselbe Individuum verweisen).

Wie in der WFL stellen wir Symbolisierungsschlüssel zur Verfügung. Diese geben vorübergehend an, worauf ein Name verweist. Zum Beispiel:

e: Elsa
g: Gregor
m: Marybeth

22.3 Prädikate

Die einfachsten Prädikate sind Eigenschaften von Individuen. Es sind Dinge, die man von einem Objekt aussagen kann; Dinge, die auf ein Objekt zutreffen oder nicht. Hier sind einige Beispiele deutscher Prädikate:

_____ ist ein Hund
_____ ist ein Mitglied von Monty Python
Ein Klavier fiel auf _____

Im Allgemeinen kann man sich Prädikate als Dinge vorstellen, die sich mit singulären Termen zu Sätzen verbinden. Umgekehrt können Sie mit Sätzen beginnen und aus ihnen Prädikate bilden, indem sie singuläre Terme entfernen. Betrachten Sie z.B. den Satz: ‘Vinnie hat sich das Familienauto von Nunzio geliehen’. Durch das Entfernen eines singulären Terms können wir eines von drei verschiedenen Prädikaten erhalten:

_____ hat das Familienauto von Nunzio geliehen
Vinnie hat _____ von Nunzio geliehen
Vinnie hat das Familienauto von _____ geliehen

In der LEO sind PRÄDIKATE kursive Großbuchstaben A bis Z, mit oder ohne Subskripten. So könnten wir einen Symbolisierungsschlüssel für Prädikate schreiben:

$A(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist verärgert
$G(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist glücklich
$G_1(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ ist so groß wie oder größer als $\_\_\_\_\__y$
$Z(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ ist so zäh oder zäher wie $\_\_\_\_\__y$
$Z_2(x, y, z)$: $\_\_\_\_\__y$ befindet sich zwischen $\_\_\_\_\__x$ und $\_\_\_\_\__z$

(Warum die Subskripte zu den Lücken? Darauf kommen wir in §24 zurück).

Wenn wir unsere beiden Symbolisierungsschlüssel kombinieren, können wir nun damit beginnen, einige deutsche Sätze zu symbolisieren, die diese Namen und Prädikate verwenden. Nehmen wir zum Beispiel die deutschen Sätze:

1. Elsa ist verärgert.
2. Gregor und Marybeth sind verärgert.
3. Wenn Elsa verärgert ist, dann sind auch Gregor und Marybeth verärgert.

Satz 1 ist einfach: wir symbolisieren ihn als '$A(e)$'.

Satz 2 ist eine Konjunktion zweier einfacher Sätze. Die einfachen Sätze können durch '$A(g)$' und '$A(m)$' symbolisiert werden. Dann bedienen wir uns unserer Ressourcen aus der WFL und symbolisieren den ganzen Satz durch '$A(g) \wedge A(m)$'. Dies veranschaulicht einen wichtigen Punkt: Die LEO beinhaltet alle wahrheitsfunktionalen Junktoren der WFL. Sie ist eine *Erweiterung* der WFL.

Satz 3 ist ein Konditional, dessen Antezedens Satz 1 und dessen Konsequens Satz 2 ist. Daher können wir diesen Satz mit '$A(e) \rightarrow (A(g) \wedge A(m))$' symbolisieren.

22.4 Quantoren

Wir sind jetzt bereit, Quantoren einzuführen. Betrachten Sie diese Sätze:

4. Alle sind glücklich.
5. Jemand ist verärgert.

Es könnte verlockend sein, den Satz 4 als '$H(e) \wedge H(g) \wedge H(m)$' zu symbolisieren. Doch dies würde nur sagen, dass Elsa, Gregor und Marybeth glücklich sind. Wir wollen aber sagen, dass alle glücklich sind, auch diejenigen, die keinen Namen haben. Um dies zu erreichen, führen wir das Symbol '$\forall$' ein. Dieses Symbol nennen wir den UNIVERSALQUANTOR.

Auf einen Quantor muss immer eine VARIABLE folgen. In der LEO sind Variablen kursive Kleinbuchstaben 's' bis 'z', mit oder ohne Subskripte. Wir könnten also den Satz 4 als '$\forall x\, G(x)$' symbolisieren. Die Variable 'x' dient als eine Art Platzhalter. Der Ausdruck '$\forall x$' bedeutet intuitiv, dass Sie jedes Individuum auswählen und als 'x' eintragen können. Das nachfolgende '$G(x)$' zeigt an, dass das Ding, das Sie ausgewählt haben, glücklich ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass es keinen besonderen Grund gibt, 'x' anstelle einer anderen Variable zu verwenden. Die Sätze '$\forall x\, G(x)$', '$\forall y\, G(y)$', '$\forall z\, G(z)$' und '$\forall x_5 G(x_5)$' verwenden verschiedene Variablen, aber sie sind alle äquivalent.

Um den Satz 5 zu symbolisieren, führen wir ein weiteres neues Symbol ein: den EXISTENZQUANTOR, '$\exists$'. Wie der Universalquantor erfordert auch der Existenzquantor eine Variable. Der Satz 5 kann durch '$\exists x\, A(x)$' symbolisiert werden. Während '$\forall x\, A(x)$' als 'für alle x, x ist verärgert', wird '$\exists x\, A(x)$' als 'es gibt zumindest ein Ding, x, und x ist verärgert'. Auch hier gilt: die Variable ist eine Art Platzhalter. Wir hätten Satz 5) auch als '$\exists z\, A(z)$', '$\exists w_{256}\, A(w_{256})$', usw. symbolisieren können.

Einige weitere Beispiele werden helfen. Betrachten Sie diese weiteren Sätze:

6. Niemand ist verärgert.
7. Es gibt jemanden, der nicht glücklich ist.
8. Nicht alle sind glücklich.

Satz 6 kann wie folgt umschrieben werden: 'Es ist nicht der Fall, dass jemand verärgert ist'. Wir können ihn mithilfe der Negation und eines Existenzquantors symbolisieren: '$\neg\exists x\, A(x)$'. Satz 6 könnte aber auch wie folgt umgeschrieben werden: 'Alle sind nicht verärgert'. Wenn er so verstanden wird, dann kann dieser Satz mithilfe der Negation und eines Universalquantors symbolisiert werden: '$\forall x \neg A(x)$'. Beide Alternativen sind akzeptable Symbolisierungen. Es wird sich in der Tat herausstellen, dass im Allgemeinen $\forall x \neg \mathscr{A}$ äquivalent zu $\neg\exists x\, \mathscr{A}$ ist. (Beachten Sie, dass wir hier '$\mathscr{A}$' als Metavariable verwenden). Einen Satz auf die eine Art und Weise zu symbolisieren und nicht auf die andere, mag in manchen Kontexten 'natürlicher' erscheinen, aber es ist nicht viel mehr als eine Frage des Geschmacks.

Der Satz 7 wird am natürlichsten als 'Es gibt zumindest etwas ‚x, und x ist nicht glücklich'. Dies wird dann als '$\exists x \neg G(x)$' symbolisiert. Natürlich hätten wir auch '$\neg\forall x\, G(x)$' schreiben können, was wir so verstehen würden: 'Es ist nicht der Fall, dass alle glücklich sind'. Auch das wäre eine vollkommen angemessene Symbolisierung des Satzes 8.

22.5 Domänen

Angesichts des Symbolisierungsschlüssels, den wir verwendet haben, symbolisiert '$\forall x\, G(x)$' 'Alle sind glücklich'. Wer ist mit diesem *alle* gemeint? Wenn wir im Deutschen Sätze wie diesen verwenden, meinen wir für gewöhnlich nicht jeden, der jetzt auf der Erde lebt. Mit Sicherheit meinen wir nicht jeden, der jemals gelebt hat oder jemals leben wird. Gewöhnlich meinen wir etwas Bescheideneres: jeden, der jetzt im Gebäude ist, jeden, der dieses Modul belegt, oder ähnliches.

Um diese Mehrdeutigkeit zu beseitigen, müssen wir eine DOMÄNE angeben. Die Domäne ist die Menge von Dingen, über die wir sprechen. Wenn wir also über Menschen in Dortmund sprechen wollen, dann definieren wir die Domäne als Menschen in Dortmund. Wir schreiben dies an den Anfang des Symbolisierungsschlüssels, etwa so:

Domäne: Menschen in Dortmund

Die Quantoren *überspannen* diese Domäne. Angesichts dieser Domäne ist '$\forall x$' ungefähr so zu lesen wie 'Jeder Mensch in Dortmund ist so, dass ...' und '$\exists x$' ist ungefähr so zu lesen wie 'Zumindest ein Mensch in Dortmund ist so, dass ...'.

In der LEO muss die Domäne immer mindestens ein Ding enthalten. Darüber hinaus können wir im Deutschen legitimerweise aus 'Gregor ist verärgert' 'Jemand ist verärgert' herleiten. In der LEO wollen wir also ebenso in der Lage sein, '$\exists x\, A(x)$' von '$A(g)$' herzuleiten. Wir werden also darauf bestehen, dass jeder Name auf genau ein Ding in der Domäne verweist. Wenn wir Menschen von außerhalb Dortmunds benennen wollen, dann müssen wir diese Menschen in die Domäne aufnehmen.

> Eine Domäne hat *mindestens* ein Element. Jeder Name muss auf *genau* ein Element der Domäne verweisen, wobei auf ein Element der Domäne von einem Namen, mehreren Namen oder keinem Namen verwiesen werden kann.

Selbst die Zulassung einer Domäne mit nur einem Element kann zu merkwürdigen Ergebnissen führen. Nehmen wir an, wir haben dies als einen Symbolisierungsschlüssel:

Domäne: der Eiffelturm
$P(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ ist in Paris.

Der Satz $\forall x\, P(x)$ könnte im Deutschen als 'Alles ist in Paris' paraphrasiert werden. Doch das wäre irreführend. Es bedeutet, dass alles *in der Domäne* in Paris ist. Diese Domäne enthält nur den Eiffelturm, so dass mit diesem Symbolisierungsschlüssel $\forall x\, P(x)$ nur bedeutet, dass der Eiffelturm in Paris ist.

Leere Terme

In der LEO muss jeder Name auf genau ein Element der Domäne verweisen. Ein Name kann sich nicht auf mehr als ein Ding beziehen - es ist ein *singulärer* Term. Jeder Name muss aber auf *etwas* verweisen. Dies ist mit einem klassischen philosophischen

Problem verbunden: dem so genannten Problem der leeren Terme.

Mittelalterliche Philosophen benutzten typischerweise Sätze über die *Chimäre*, um dieses Problem zu veranschaulichen. Die Chimäre ist ein mythologisches Geschöpf; sie existiert nicht wirklich. Betrachten Sie diese beiden Sätze:

9. Die Chimäre ist verärgert.
10. Die Chimäre ist nicht verärgert.

Es ist verlockend, einen Namen einfach so zu definieren, dass er die gleiche Bedeutung wie ‘die Chimäre’ hat. Der Symbolisierungsschlüssel würde wie folgt aussehen:

Domäne: Irdische Kreaturen
$A(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ ist verärgert.
c: Die Chimäre

Wir könnten dann den Satz 9 als $A(c)$ und den Satz 10 als $\neg A(c)$ symbolisieren.

Probleme entstehen aber, wenn wir fragen, ob diese Sätze wahr oder falsch sind. Eine Möglichkeit ist zu sagen, dass Satz 9 nicht wahr ist, weil es keine Chimäre gibt. Wenn Satz 9 falsch ist, weil er von einer nicht existierende Sache handelt, dann ist Satz 10 aus dem gleichen Grund auch falsch. Dies würde jedoch bedeuten, dass $A(c)$ und $\neg A(c)$ beide falsch wären. Angesichts der Wahrheitsbedingungen für die Negation kann dies jedoch nicht der Fall sein.

Was sollen wir tun, angesichts der Tatsache, dass wir nicht sagen können, dass beide Sätze falsch sind? Eine andere Möglichkeit ist zu sagen, dass der Satz 9 *sinnlos* ist, weil er von einer nicht existierenden Sache handelt. Also wäre $A(c)$ ein sinnvoller Ausdruck der LEO relativ zu einigen Symbolisierungsschlüsseln, aber nicht relativ zu anderen. Doch dies würde unsere formale Sprache zur Geisel bestimmter Symbolisierungsschlüssel machen. Da wir an der Form der Sätze unserer Sprache interessiert sind, wollen wir die logische Kraft eines Satzes wie $A(c)$ unabhängig von einem bestimmten Symbolisierungsschlüssel betrachten. Wenn $A(c)$ manchmal sinnvoll und manchmal sinnlos wäre, könnten wir das aber nicht tun.

Das ist das *Problem der leeren Terme*, und wir werden später noch einmal darauf zurückkommen (siehe S. 254.) Der wichtige Punkt für jetzt ist, dass jeder Name der LEO auf etwas in der Domäne verweisen *muss*, obwohl die Domäne welche Dinge auch immer enthalten kann, die wir wollen. Wenn wir Argumente über mythologische Wesen symbolisieren wollen, dann müssen wir eine Domäne definieren, die sie miteinschließt und laut der sie eben schon existieren. Dies zu tun ist wichtig, wenn wir die Logik von (literarischen) Erzählungen berücksichtigen wollen. Wir können einen Satz wie 'Sherlock Holmes lebte in der Baker Street 221B' symbolisieren, indem wir fiktionale Figuren wie Sherlock Holmes in unsere Domäne aufnehmen.

KAPITEL 23

Sätze mit einem Quantor

Wir haben jetzt alle Teile der LEO beisammen. Um kompliziertere Sätze zu symbolisieren, muss man nur wissen, wie man Prädikate, Namen, Quantoren und Junktoren kombiniert.

23.1 Gängige Quantorenphrasen

Betrachten Sie die folgenden Sätze:

1. Jede Münze in meiner Tasche ist ein Euro.
2. Eine Münze auf dem Tisch ist ein Schilling.
3. Nicht alle Münzen auf dem Tisch sind Schillinge.
4. Keine der Münzen in meiner Tasche sind Schillinge.

Bei der Bereitstellung eines Symbolisierungsschlüssels müssen wir eine Domäne angeben. Da wir über Münzen in meiner Tasche und auf dem Tisch sprechen, muss die Domäne zumindest alle diese Münzen enthalten. Da wir von nichts anderem als von Münzen sprechen, lassen wir die Domäne alle Münzen sein. Da es sich nicht um bestimmte Münzen handelt, brauchen wir uns auch nicht mit Namen zu befassen. Hier ist also unser Schlüssel:

Domäne: Alle Münzen
$T(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist in meiner Tasche
$T_2(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist auf dem Tisch
$E(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist ein Euro
$S(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist ein Schilling

Satz 1 wird am natürlichsten mittels eines Universalquantors symbolisiert. Der Universalquantor sagt etwas über alles in der Domäne aus, nicht nur über die Münzen in meiner Tasche. Satz 1 kann wie folgt umschrieben werden: ‘Für jede Münze, wenn diese Münze in meiner Tasche ist, dann ist sie ein Euro’. Wir können ihn also als ‘$\forall x(T(x) \rightarrow E(x))$’.

Da es in Satz 1 um Münzen geht, die sich sowohl in meiner Tasche befinden, als auch um Schillinge, könnte es verlockend sein, ihn mit einer Konjunktion zu symbolisieren. Der Satz ‘$\forall x(T(x) \wedge E(x))$’ würde jedoch den Satz ‘Jede Münze ist sowohl ein Euro als auch in meiner Tasche’ symbolisieren. Dies bedeutet jedoch offensichtlich etwas ganz anderes als der Satz 1. Daher sagen wir:

> Ein Satz kann als $\forall x(\mathscr{F}(x) \rightarrow \mathscr{G}(x))$ symbolisiert werden, wenn er im Deutschen als ‘Alle Fs sind Gs’ oder ‘Jede/r/s F ist ein/e G’ paraphrasiert werden kann.

Satz 2 wird am natürlichsten mit einem Existenzquantor symbolisiert. er kann als ‘es gibt eine Münze, die auf dem Tisch liegt und ein Schilling ist’ umschrieben werden. Also können wir ihn als ‘$\exists x(T(x) \wedge D(x))$’ symbolisieren.

Mit dem Universalquantor nutzten wir ein Konditional, mit dem Existenzquantor hingegen eine Konjunktion. Nehmen Sie an, wir hätten stattdessen ‘$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$’ geschrieben. Dies bedeutet, dass es ein Objekt in der Domäne gibt, welches ‘$(T(x) \rightarrow D(x))$’ erfüllt. Aber in der WFL ist $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ äquivalent zu $\neg\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$. Diese Äquivalenz gilt auch in der LEO. Also ist ‘$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$’ wahr, wenn ein Objekt in der Domäne ist, welches ‘$(\neg T(x) \vee D(x))$’ erfüllt. Und das bedeutet: ‘$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$’ ist wahr, wenn irgendeine Münze *entweder* nicht auf dem Tisch ist *oder* ein Schilling ist. Doch es gibt sehr viele Münzen, die nicht auf dem Tisch sind. Daher ist es *sehr leicht* für ‘$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$’ wahr zu sein. Ein Konditional ist normalerweise der beste Junktor für den Universalquantor, aber ein Konditional im Geltungsbereich eines Existenzquantors sagt etwas aus, das oftmals zu schwach ist. Als allgemeine Faustregel gilt, dass Sie das Konditional nicht im Geltungsbereich eines Existenzquantors nutzen sollten, außer Sie sind sich sicher, dass Sie es brauchen.

> Ein Satz kann als $\exists x(\mathscr{F}(x) \land \mathscr{G}(x))$ symbolisiert werden, wenn er im Deutschen als 'Ein/e F ist G' umschrieben werden kann.

Satz 3 kann als 'Es ist nicht der Fall, dass jede Münze auf dem Tisch ein Schilling ist' paraphrasiert werden. Also können wir ihn als '$\neg\forall x(T(x) \to D(x))$' symbolisieren. Sie können 3 auch als 'Eine Münze auf dem Tisch ist kein Schilling' umschreiben. Sie würden ihn dann als '$\exists x(T(x) \land \neg D(x))$' symbolisieren. Obwohl es Ihnen vielleicht noch nicht klar ist, sind diese zwei Symbolisierungen äquivalent. (Dies ist der Fall, weil $\neg\forall x\,\mathscr{A}$ und $\exists x\neg\mathscr{A}$, sowie $\neg(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ und $\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B}$ äquivalent sind.)

Satz 4 kann als 'Es ist nicht der Fall, dass ein Schilling in meiner Tasche ist' umschrieben werden. Dies kann wiederum als '$\neg\exists x(P(x) \land D(x))$' symbolisiert werden. Den Satz können wir auch als 'Alles in meiner Tasche ist kein Schilling' paraphrasieren und dann mittels '$\forall x(P(x) \to \neg D(x))$' symbolisiert werden. Auch hier gilt, dass die zwei Symbolisierungen äquivalent sind; beide sind korrekte Symbolisierungen von 4.

> Ein Satz, der im Deutschen als 'Kein F ist G' paraphrasiert werden kann, kann als $\neg\exists x(\mathscr{F}(x) \land \mathscr{G}(x))$ und als $\forall x(\mathscr{F}(x) \to \neg\mathscr{G}(x))$ symbolisiert werden.

Zuletzt wenden wir uns dem Wort 'nur' zu, z.B. in:

5. Nur Schillinge sind auf dem Tisch.

Wie sollen wir dies symbolisieren? Eine gute Strategie ist, uns zu überlegen, unter welchen Umständen der Satz falsch ist. Wenn wir 5 nutzen, schließen wir all jene Fälle aus, in denen etwas auf dem Tisch ist, das kein Schilling ist. Also können wir den Satz genau so symbolisieren, wie wir auch 'Keine Dinge, die keine Schillinge sind, sind auf dem Tisch' symbolisieren können. Die möglichen Symbolisierungen sind also: '$\neg\exists x(T(x) \wedge \neg D(x))$' oder '$\forall x(T(x) \rightarrow \neg\neg D(x))$'. Da sich doppelte Negationen aufheben, ist die zweite Option äquivalent zu '$\forall x(T(x) \rightarrow D(x))$'. D.h. 'Nur Schillinge sind am Tisch' und 'Alles auf dem Tisch ist ein Schilling' erhalten die gleiche Symbolisierung.

> Ein Satz der im Deutschen als 'Nur Fs sind Gs' paraphrasiert werden kann, kann also $\neg\exists x(\mathscr{G}(x) \wedge \neg\mathscr{F}(x))$ oder $\forall x(\mathscr{G}(x) \rightarrow \mathscr{F}(x))$ symbolisiert werden.

23.2 Leere Prädikate

In §22 betonten wir, dass ein Name auf genau ein Objekt in der Domäne verweisen muss. Im Gegensatz dazu muss ein Prädikat auf nichts in der Domäne zutreffen. Ein Prädikat, das auf nichts in der Domäne zutrifft, nenn wir ein LEERES PRÄDIKAT.

Nehmen Sie an, wir wollen diese beiden Sätze symbolisieren:

6. Jede Maus versteht die deutsche Sprache.
7. Eine Maus versteht die deutsche Sprache.

Auf folgende Weise können wir den Symbolisierungsschlüssel für diese Sätze aufschreiben:

Domäne: Tiere
$M(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist eine Maus.
$S(x)$: $\underline{\qquad}_x$ versteht die deutsche Sprache.

Satz 6 kann nun als '$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$' symbolisiert werden und Satz 7 als '$\exists x(M(x) \wedge S(x))$'.

Es ist verlockend zu sagen, dass 6 7 zur Folge hat. Wir könnten also denken, dass es unmöglich ist, dass jede Maus die deutsche Sprache versteht, wenn es keine Maus gibt, die das tut. Aber das wäre ein Fehler. Der Satz '$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$' kann wahr sein, auch wenn der Satz '$\exists x(M(x) \wedge S(x))$' falsch ist.

Wie kann das sein? Die Antwort erhalten wir, indem wir uns vor Augen führen, was passieren würde, *wenn es keine Mäuse geben würde*. In dem Fall wäre '$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$' *nichtssagenderweise* wahr: nehmen Sie jede Maus, die Sie wollen—sie versteht die deutsche Sprache! Aber wenn es keine Mäuse (in der Domäne) geben würde, dann wäre '$\exists x(M(x) \wedge S(x))$' falsch.

Hier ist ein weiteres Beispiel. Lasst uns den obigen Symbolisierungsschlüssel erweitern:

$R(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist ein Rotor

Nun, betrachten wir '$\forall x(R(x) \rightarrow M(x))$'. Dieser Satz symbolisiert 'Jeder Rotor ist eine Maus'. Er ist wahr, unserem Symbolisierungsschlüssel nach, obwohl wir nicht sagen wollen, dass es eine ganze Reihe von Rotormäusen gibt. Denn '$\forall x(R(x) \rightarrow M(x))$' ist wahr genau dann, wenn jedes Objekt in der Domäne, das ein Rotor ist, auch eine Maus ist. Doch weil die Domäne nur *Tiere* beinhaltet, gibt es keine Rotoren in der Domäne. Daher ist der Satz *nichtssagenderweise* wahr.

Wenn Sie den Satz 'Jeder Rotor ist eine Maus' tatsächlich symbolisieren würden, dann würden Sie wahrscheinlich Maschinen zur Domäne hinzufügen. Denn das Prädikat 'R' wäre dann nicht leer und '$\forall x(R(x) \rightarrow M(x))$' wäre falsch.

> Wenn $\mathscr{F}$ ein leeres Prädikat ist, dann ist jeder Satz $\forall x(\mathscr{F}(x) \rightarrow \ldots)$ nichtssagenderweise wahr.

23.3 Domäne wählen

Die angemessene Symbolisierung eines deutschen Satzes in der LEO hängt vom Symbolisierungsschlüssel ab. Die Wahl eines Schlüssels kann schwierig sein. Nehmen Sie an, wir wollen den folgenden Satz symbolisieren:

8. Jede Rose hat einen Dorn.

Wir könnten diesen Symbolisierungsschlüssel anbieten:

$R(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist eine Rose
$D(x)$: $\underline{\qquad}_x$ hat einen Dorn

Es ist verlockend zu sagen, dass wir 8 als '$\forall x(R(x) \rightarrow D(x))$' symbolisieren sollen, aber noch haben wir keine Domäne gewählt. Wenn die Domäne alle Rosen enthält, dann wäre dies eine gute Symbolisierung. Aber wenn die Domäne nur *Objekte in meiner Küche* enthält, dann würde '$\forall x(R(x) \rightarrow D(x))$' nur aussagen, dass jede Rose *in meiner Küche* einen Dorn hat. Wenn es nun aber keine Rosen in meiner Küche gibt, dann ist dieser Satz nichtssagenderweise wahr. Das wollen wir nicht. Um 8 adäquat zu symbolisieren, müssen wir alle Rosen in der Domäne einschließen. An dieser Stelle haben wir die Wahl zwischen zwei Optionen.

Erstens können wir die Domäne so beschränken, dass sie *nur* Rosen beinhaltet. Dann können wir den Satz 8 als '$\forall x\, D(x)$' symbolisieren. Diese Symbolisierung ist wahr genau dann, wenn jedes Objekt in der Domäne einen Dorn hat; weil die Domäne nur Rosen beinhaltet, ist dies wahr genau dann, wenn jede Rose einen Dorn hat. Indem wir die Domäne beschränken, können wir unseren deutschen Satz mit einem sehr kurzen und einfachen Satz der LEO symbolisieren. Dieser Ansatz kann uns also Arbeit ersparen, wenn alle Sätze, die wir symbolisieren wollen, nur von Rosen handeln.

Zweitens können wir die Domäne auch andere Objekte als Rosen beinhalten lassen: Rhododendren, Ratten, Gewehre, was auch immer. Diesen Ansatz müssen wir wählen, wenn wir mit Hilfe des gleichen Symbolisierungsschlüssels auch weitere Sätze symbolisieren wollen:

9. Jeder Cowboy singt ein trauriges Lied.

Unsere Domäne muss nun sowohl alle Rosen (für Satz 8) und alle Cowboys (für Satz 9) beinhalten. Also könnten wir den folgenden Symbolisierungsschlüssel anbieten:

Domäne: Personen und Pflanzen
$C(x)$: _____$_x$ ist ein Cowboy
$S(x)$: _____$_x$ singt ein trauriges Lied
$R(x)$: _____$_x$ ist eine Rose
$D(x)$: _____$_x$ hat einen Dorn

Nun werden wir den Satz 8 mit '$\forall x(R(x) \rightarrow D(x))$' symbolisieren, da '$\forall x\, D(x)$' den Satz 'Jede Person und Pflanze hat einen Dorn' symbolisieren würde. Ähnlicherweise werden wir den Satz 9 als '$\forall x(C(x) \rightarrow S(x))$' symbolisieren.

Im Allgemeinen kann der Universalquantor verwendet werden, um den deutschen Ausdruck 'Jedermann' zu symbolisieren, wenn die Domäne nur Personen enthält. Wenn es in der Domäne Menschen und andere Dinge gibt, dann muss 'jedermann' als 'jede Person' behandelt werden.

23.4 Der Nutzen von Paraphrasen

Wenn Sie deutsche Sätze in der LEO symbolisieren, ist es wichtig, die Struktur der Sätze zu verstehen, die Sie symbolisieren möchten. Was zählt ist die abschließende Symbolisierung in der LEO. Manchmal werden Sie in der Lage sein, von einem deutschen Satz direkt zu einem Satz der LEO überzugehen. Andere Male hilft es, den deutschen Satz ein oder mehrere Male zu paraphrasieren. Jede nachfolgende Paraphrase sollte vom ursprünglichen Satz näher an etwas herankommen, das Sie leicht direkt in der LEO symbolisieren können.

Für die nächsten Beispiele werden wir diesen Symbolisierungsschlüssel verwenden:

Domäne: Personen
$B(x)$: _____$_x$ ist ein Bassist.
$R(x)$: _____$_x$ ist ein Rockstar.
k: Kim Deal

Betrachten wir nun diese Sätze:

10. Wenn Kim Deal eine Bassistin ist, dann ist sie ein Rockstar.
11. Wenn eine Person eine Bassistin ist, dann ist sie ein Rockstar.

Die Konsequenten in 10 und 11 beinhalten die gleichen Worte ('... ist sie ein Rockstar'), aber sie haben sehr verschiedene Bedeutungen. Um dies klarzustellen, hilft es die ursprünglichen Sätze umzuschreiben, insbesondere die Pronomina.

Satz 10 kann als 'Wenn Kim Deal eine Bassistin ist, dann ist *Kim Deal* ein Rockstar'. Dies kann als '$B(k) \rightarrow R(k)$' symbolisiert werden.

Satz 11 muss anders umschrieben werden 'Wenn eine Person eine Bassistin ist, dann ist *diese Person* ein Rockstar'. Dieser Satz beschäftigt sich nicht mit einer bestimmten Person, also brauchen wir eine Variable. In einem Zwischenschritt können wir den Satz als 'Für jede Person x gilt: wenn x eine Bassistin ist, dann ist x ein Rockstar'. Dies kann nun als '$\forall x(B(x) \rightarrow R(x))$' symbolisiert werden. Und das ist der gleiche Satz, den wir auch benutzt hätten, um 'Jede Bassist*in ist ein Rockstar' darzustellen. Das ist klarerweise wahr genau dann, wenn Satz 11 wahr ist; so wie erhofft.

Betrachten Sie nun ein paar weitere Sätze:

12. Wenn jemand ein/e Bassist*in ist, dann ist Kim Deal ein Rockstar.
13. Wenn jemand ein/e Bassist*in ist, dann ist er/sie ein Rockstar.

Hier kommen in das Antezedens von 12 und 13 die gleichen Worte vor ('Wenn jemand eine Bassist*in ist...'). Aber es ist nicht einfach zu wissen, wie diese beiden Vorkommnisse zu symbolisieren sind. Auch hier kommt uns die Paraphrase zu Hilfe.

Satz 12 kann als 'Wenn es eine Bassist*in gibt, dann ist Kim Deal ein Rockstar' dargestellt werden. Nun ist klar, dass der Satz ein Konditional ist, dessen Antezedens einen Quantor enthält. Also können wir den ganzen Satz mit einem Konditional als Hauptjunktor symbolisieren: '$\exists x B(x) \rightarrow R(k)$'.

Satz 13 kann als ‘Für alle Personen x gilt: wenn x ein/e Bassist*in ist, dann ist x ein Rockstar’. Oder, in schönerem Deutsch: ‘Alle Bassist*innen sind Rockstars’. Dies ist am besten als ‘$\forall x(B(x) \rightarrow R(x))$’ zu symbolisieren, genau wie Satz 11.

Das Prinzip hier ist, dass das deutsche Wort ‘jemand’ typischerweise mit Hilfe eines Quantors symbolisiert werden sollte. Wenn es Ihnen schwer fällt, zu entscheiden, ob Sie einen Existenz- oder Universalquantor verwenden sollen, versuchen Sie, den Satz mit einem deutschen Satz zu paraphrasieren, der ‘jemand’ durch ein anderes Wort ersetzt.

23.5 Quantoren und Geltungsbereich

Betrachten wir die folgenden Sätze:

14. Wenn alle Bassist*innen sind, dann ist Lars ein Bassist
15. Alle sind so, dass, wenn sie Bassist*innen sind, auch Lars ein Bassist ist.

Um diese Sätze zu symbolisieren, fügen wir einen Namen zu unserem Symbolisierungsschlüssel hinzu:

l: Lars

Satz 14 ist ein Konditional, dessen Antezedens ‘Alle sind Bassist*innen’ ist. Also symbolisieren wir diesen Satz als ‘$\forall x\, B(x) \rightarrow B(l)$’. Dieser Satz ist *notwendigerweise* wahr: wenn *alle* Bassist*innen sind, dann können wir irgendeine Person nehmen—zum Beispiel Lars—und sie wir ein/e Bassist*in sein.

Satz 15 hingegen ist besser umschrieben als ‘Jede Person x ist so, dass gilt: wenn x ein/e Bassist*in ist, dann ist Lars ein Bassist’. Das symbolisieren wir als ‘$\forall x(B(x) \rightarrow B(l))$’. Dieser Satz kann falsch sein; Kim Deal ist eine Bassist*in. Also ist ‘$B(k)$’ wahr. Nehmen wir nun an, dass Lars kein Bassist ist (er ist Schlagzeuger). Dann ist ‘$B(l)$’ falsch. Dementsprechend ist nun ‘$B(k) \rightarrow B(l)$’ falsch und somit auch ‘$\forall x(B(x) \rightarrow B(l))$’.

Kurz gesagt: '$\forall x B(x) \to B(l)$' und '$\forall x(B(x) \to B(l))$' sind sehr unterschiedliche Sätze. Der Unterschied zwischen ihnen beruht in einem Unterschied der *Geltungsbereiche* ihrer Quantoren. Der Geltungsbereich eines Quantors ähnelt dem der Negation, welchen wir uns in unserer Diskussion der WFL angesehen hatten.

Im Satz '$\neg B(k) \to B(l)$' ist der Geltungsbereich von '$\neg$' nur das Antezedens des Konditionals. Wir sagen so etwas wie: wenn '$B(k)$' falsch ist, dann ist '$B(l)$' wahr. Ähnlich verhält sich der Satz '$\forall x B(x) \to B(l)$'. Auch hier ist der Geltungsbereich von '$\forall x$' nur das Antezedens des Konditionals. Wir sagen so etwas wie: wenn '$B(x)$' auf *alle* zutrifft, dann ist auch '$B(l)$' wahr.

Die Moral hier ist einfach: wenn Sie Konditionale verwenden, stellen Sie sicher, dass sie den Geltungsbereich ihrer Junktoren und Quantoren richtig zugeordnet haben.

Mehrdeutige Prädikate

Wenden wir uns dem folgenden Satz zu:

16. Adina ist eine erfahrene Chirurgin.

Die Domäne besteht aus Personen; $K(x)$ symbolisiert 'x ist ein/e erfahrene/r Chirurg*in'; a verweist auf Adina. Satz 16 symbolisieren wir dann als $K(a)$.

Was, wenn wir stattdessen das folgende Argument symbolisieren wollen?

> Das Krankenhaus stellt nur erfahrene Chirurg*innen ein. Alle Chirurg*innen sind gierig. Billy ist ein Chirurg, aber er ist nicht erfahren. Deshalb ist Billy gierig, aber das Krankenhaus wird ihn nicht einstellen.

Wir müssen hier zwischen *erfahrenen Chirurg*innen* und *Chirurg*innen* unterscheiden. Das tun wir im folgenden Symbolisierungsschlüssel:

Domäne: Personen

$G(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ ist gierig.
$K(x)$: Das Krankenhaus stellt $\_\_\_\_\_\__x$ ein.
$C(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ ist ein/e Chirurg*in.
$E(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ ist erfahren.
b: Billy

Dieser Schlüssel erlaubt uns das Argument wie folgt zu symbolisieren:

$$\begin{array}{rl} & \forall x\big[\neg(C(x) \land E(x)) \to \neg K(x)\big] \\ & \forall x(C(x) \to G(x)) \\ & C(b) \land \neg E(b) \\ \therefore & G(b) \land \neg K(b) \end{array}$$

So weit, so gut. Doch das folgende Beispiel bringt einige Komplikationen zu Tage:

> Carola ist eine erfahrene Chirurgin und eine Tennisspielerin. Also ist Carola eine erfahrene Tennisspielerin.

Wenn wir mit dem Symbolisierungsschlüssel beginnen, den wir für das vorangegangene Argument verwendet haben, könnten wir einfach ein Prädikat ($T(x)$ für 'x ist ein/e Tennisspieler*in') und einen Namen (c für Carola) hinzufügen. Dann symbolisieren wir das Argument so:

$$\begin{array}{rl} & (C(c) \land E(c)) \land T(c) \\ \therefore & T(c) \land E(c) \end{array}$$

Aber diese Symbolisierung ist eine Katastrophe! Das ursprüngliche deutsche Argument ist *ungültig*, während die Symbolisierung ein *gültiges* Argument der LEO ist. Das Problem ist, dass es einen Unterschied zwischen chirurgischer Erfahrung und Tenniserfahrung gibt: man kann erfahren *als* Chirurg*in sein, ohne erfahren *als* Tennisspieler*in zu sein. Um das Argument korrekt zu symbolisieren, brauchen wir zwei Prädikate, welches jeweils von einer bestimmten Art der Erfahrung handeln. Wenn wir $E_1(x)$ für

'x ist erfahren als Chirurg*in' und $K_2(x)$ für 'x ist erfahren als Tennisspieler*in' verwenden, dann können wir das Argument so symbolisieren:

$$
\begin{array}{ll}
 & (C(c) \wedge E_1(c)) \wedge T(c) \\
\therefore & T(c) \wedge E_2(c)
\end{array}
$$

Wie das Argument der deutschen Sprache ist auch dieses Argument ungültig.

Man beachte hier, dass keine spezielle logische Verbindung zwischen $E_1(c)$ und $R(c)$ besteht. Als Symbole der LEO könnten sie beliebige einstellige Prädikate beinhalten. Im Deutschen dagegen gibt es eine Verbindung zwischen 'ist ein/e Chirurg*in' und 'ist ein/e erfahrene/r Chirurg*in': Jede erfahrene Chirurgin ist eine Chirurgin. Um diese Verbindung erfassen, symbolisieren wir 'Carola ist eine erfahrene Chirurgin' als $C(c) \wedge E_1(c)$. Zu Deutsch: 'Carola ist eine Chirurgin und ist erfahren als Chirurgin.'

Die Moral dieser Beispiele ist, dass man sich davor hüten muss, Prädikate auf mehrdeutige Weise zu symbolisieren. Ähnliche Probleme können bei Prädikaten wie *gut*, *schlecht*, *groß* und *klein* auftreten. So wie erfahrene Chirurg*innen und erfahrene Tennisspieler*innen unterschiedliche Erfahrungen haben, so sind große Hunde, große Mäuse und große Probleme auf unterschiedliche Weise groß.

Reicht es aus, *ein* Prädikat zu haben, das 'ist ein/e erfahrene/r Chirurg*in' symbolisiert, anstatt zweier Prädikate 'ist erfahren' und 'ist ein/e Chirurgin'? Manchmal. Wie der Satz 16 zeigt, brauchen wir manchmal nicht zwischen erfahrenen Chirurg*innen und anderen Chirurg*innen zu unterscheiden. In anderen Fällen aber müssen wir diese Unterscheidung sehr wohl treffen.

Ähnliches gilt auch für andere Prädikate. Wir müssen nicht immer zwischen verschiedenen Weisen, gut, schlecht oder groß zu sein, unterscheiden. Wenn Sie ein Argument symbolisieren, bei dem es nur um Hunde geht, dann ist es in Ordnung, ein Prädikat zu definieren, das 'ist groß' symbolisiert. Wenn ihre Domäne jedoch Hunde und Mäuse umfasst, ist es wahrscheinlich am besten, das Prädikat feinkörniger zu definieren, sodass es 'ist groß für einen Hund' symbolisiert.

Übungen

A. Hier sind die syllogistischen Figuren, die von Aristoteles und seinen Nachfolgern identifiziert wurden, zusammen mit ihren mittelalterlichen Namen:

1. **Barbara**. Alle Gs sind F. All Hs sind G. Also: Alle Hs sind F.
2. **Celarent**. Kein G ist F. Alle Hs sind G. Also: Kein H ist F
3. **Ferio**. Kein G ist F. Ein H ist G. Also: Ein H ist kein F.
4. **Darii**. Alle Gs sind F. Ein H ist G. Also: Ein H ist F.
5. **Camestres**. Alle Fs sind G. Kein H ist G. Also: Keine Hs sind F.
6. **Cesare**. Kein F ist G. Alle Hs sind G. Also: Kein H ist F.
7. **Baroko**. Alle Fs sind G. Ein H ist kein G. Also: Ein H ist kein F.
8. **Festino**. Kein F ist G. Ein H ist G. Also: Ein H ist kein F.
9. **Datisi**. Alle Gs sind F. Ein G ist H. Also: Ein H ist F.
10. **Disamis**. Ein G ist F. Alle Gs sind H. Also: Ein H ist F.
11. **Ferison**. Kein G ist F. Ein G ist H. Also: Ein H ist kein F.
12. **Bokardo**. Ein G ist kein F. Alle Gs sind H. Also: Ein H ist kein F.
13. **Camenes**. Alle Fs sind G. Kein G ist H. Also: Kein H ist F.
14. **Dimaris**. Ein F ist G. Alle Gs sind H. Also: Ein H ist F.
15. **Fresison**. Kein F ist G. Ein G ist H. Also: Ein H ist kein F.

Symbolisieren Sie jedes dieser Argumente in der LEO.

B. Unter Verwendung des folgenden Symbolisierungsschlüssels:

Domäne: Personen
$K(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ kennt den Code

$S(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Spion
$V(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist Vegetarier
h: Hofthor
i: Ingmar

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Weder Hofthor noch Ingmar ist ein Vegetarier.
2. Kein Spion kennt den Code.
3. Niemand kennt den Code, es sei denn, Ingmar tut es.
4. Hofthor ist ein Spion, aber kein Vegetarier ist ein Spion.

C. Unter Verwendung des folgenden Symbolisierungsschlüssels:

Domäne: Tiere
$A(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Alligator.
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist eine Maus.
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Reptil.
$Z(x)$: $\_\_\_\_\__x$ lebt im Zoo.
a: Amos
b: Bouncer
c: Cleo

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Amos, Bouncer und Cleo leben im Zoo.
2. Bouncer ist ein Reptil, aber kein Alligator.
3. Ein Reptil lebt im Zoo.
4. Alle Alligatoren sind Reptilien.
5. Jedes Tier, das im Zoo lebt, ist entweder eine Maus oder ein Alligator.
6. Es gibt Reptilien, die keine Alligatoren sind.
7. Wenn ein Tier ein Reptil ist, dann ist Amos eines.
8. Wenn ein Tier ein Alligator ist, dann ist es ein Reptil.

D. Für jedes der folgenden Argumente, schreiben Sie einen Symbolisierungsschlüssel und symbolisieren Sie das Argument.

1. Willard ist ein Logiker. Alle Logiker*innen tragen komische Hüte. Also trägt Willard komische Hüte.
2. Nichts auf meinem Schreibtisch entgeht meiner Aufmerksamkeit. Auf meinem Schreibtisch steht ein Computer. Es gibt also einen Computer, der meiner Aufmerksamkeit nicht entgeht.
3. Alle meine Träume sind schwarz-weiß. Alte Fernsehsendungen sind in schwarz-weiß. Deshalb sind einige meiner Träume alte Fernsehsendungen.
4. Weder Holmes noch Watson waren in Australien. Ein Mensch kann ein Känguru nur sehen, wenn er in Australien oder in einem Zoo ist. Watson hat zwar kein Känguru gesehen, aber Holmes schon. Deshalb war Holmes in einem Zoo.
5. Niemand erwartet die Spanische Inquisition. Niemand kennt das Leid, das ich gesehen habe. Deshalb kennt jeder, der die Spanische Inquisition erwartet, das Leid, das ich gesehen habe.
6. Alle Babys sind unlogisch. Niemand, der unlogisch ist, kann mit einem Krokodil umgehen. Berthold ist ein Baby. Deshalb kann Berthold nicht mit einem Krokodil umgehen.

KAPITEL 24

Mehrfache Allgemeinheit

Bislang haben wir nur Sätze betrachtet, die einstellige Prädikate und einen Quantor erfordern. Die volle Leistungsfähigkeit der LEO fördern wir aber erst zu Tage, wenn wir beginnen, mehrstellige Prädikate und mehrere Quantoren zu verwenden.

24.1 Mehrstellige Prädikate

Alle Prädikate, die wir bisher betrachtet haben, betrafen Eigenschaften, die Objekte alleine haben können. Diese Prädikate haben *eine* Lücke, und um einen Satz zu bilden, müssen diese Lücke füllen. Es sind EINSTELLIGE Prädikate.

Andere Prädikate betreffen jedoch die *Beziehung* zwischen zwei Dingen. Hier sind einige Beispiele für Beziehungsprädikate im Deutschen:

_____ liebt _____
_____ ist links von _____
_____ ist verschuldet bei _____

Dies sind ZWEISTELLIGE Prädikate. Sie haben zwei Lücken, und um einen Satz zu bilden, müssen wir diese Lücken füllen. Umgekehrt: wenn wir mit einem deutschen Satz mit mehreren singulären Termen anfangen, können wir zwei dieser Begriffe entfernen, um ein zweistelliges Prädikat zu erhalten. Betrachten wir den Satz 'Vinnie hat das Familienauto von Nunzio geliehen'. Indem wir zwei singuläre Terme entfernen, können wir drei verschiedene zweistellige Prädikate erhalten:

Vinnie hat _____ von _____geliehen
_____ hat das Familienauto von _____geliehen
_____ hat _____ von Nunzio geliehen

und indem wir alle drei singuläre Terme entfernen, kriegen wir ein DREISTELLIGES Prädikat:

_____ hat _____ von _____geliehen

In der Tat gibt es keine prinzipielle Begrenzung der Zahl der Stellen, die ein Prädikat haben kann: wir können generell von nSTELLIGEN Prädikaten sprechen.

24.2 Beachten Sie die Lücke(n)!

Wir haben das Symbol '_____' genutzt um die Lücke zu symbolisieren, die wir durch das Entfernen eines singulärer Terms aus einem Satz erhalten. Wie Frege aber schon im 19ten Jahrhundert betonte, müssen wir zwischen verschiedenen Lücken differenzieren. Um einen Satz zu erhalten, können wir Lücken mit den eben entfernten singulären Termen füllen, aber wir können sie ebenso mit anderen singulären Termen füllen, oder in einer anderen Reihenfolge. Die folgenden drei verschiedenen Sätze erhalten wir, indem wir die Lücken in '_____ liebt _____' auf verschiedene Weisen füllen; aber jeder diese Sätze hat eine bestimmte Bedeutung:

1. Karl liebt Imre.
2. Imre liebt Karl.
3. Karl liebt Karl.

Wir müssen die Lücken in unseren Prädikaten im Auge behalten, sodass wir nachvollziehen können, wie wir sie füllen. Um das zu tun, ordnen wir ihnen Variablen zu. Nehmen wir an, wir wollen die obigen Sätze symbolisieren. Dann könnten wir mit dem folgenden Symbolisierungsschlüssel beginnen:

Domäne: Personen
i: Imre
k: Karl
$L(x,y)$: _____$_x$ liebt _____$_y$

Satz 1 wird nun als ‘$L(k,i)$’ symbolisiert; Satz 2 als ‘$L(i,k)$’; und Satz 3 als ‘$L(k,k)$’. Hier sind ein paar weitere Sätze, die wir mit diesem Symbolisierungsschlüssel symbolisieren können:

4. Imre liebt sich selbst.
5. Karl liebt Imre, aber nicht umgekehrt.
6. Karl wird von Imre geliebt.

Satz 4 kann ‘Imre liebt Imre’ umschrieben, und daher als ‘$L(i,i)$’ symbolisiert, werden. Satz 5 ist eine Konjunktion. Wir können diese als ‘Karl liebt Imre und Imre liebt Karl nicht’ paraphrasieren, und somit als ‘$L(k,i) \wedge \neg L(i,k)$’ symbolisieren. Satz 6 kann als ‘Imre liebt Karl’ umschrieben, und dementsprechend als ‘$L(i,k)$’ symbolisiert werden. Im letzten Fall haben wir natürlich einen Unterschied im Fokus zwischen Aktiv und Passiv; aber die Wahrheitsbedingungen des Aktivs und des Passivs scheinen sich nicht zu unterscheiden.

Die Beziehung zwischen ‘Imre liebt Karl’ und ‘Karl wird von Imre geliebt’ hebt etwas Wichtiges hervor. Um das zu sehen, nehmen Sie an, wir fügen einen weiteren Eintrag zu unserem Symbolisierungsschlüssel hinzu:

$M(x,y)$: _____$_y$ liebt _____$_x$

Der Eintrag für ‘M’ nutzt genau das gleiche deutsche Wort—‘liebt’—wie der Eintrag für ‘L’. *Aber die Lücken wurden vertauscht!* (Schauen Sie auf die Subskripte.) Und das *macht einen unterschied.*

Zur Erklärung: ein Satz wie ‘$L(k,i)$’ sagt uns, dass wir den *ersten* Namen (‘k’) und seinen Wert (Karl) mit der ‘x’-Lücke verbinden, den *zweiten* Namen aber (‘i’) und seinen Wert (Imre) mit der ‘y’-Lücke verbinden, und so *Karl liebt Imre* erhalten. Der Satz ‘$M(i,k)$’ sagt uns hingegen, dass wir die ‘x’-Lücke mit dem

Wert des *ersten* Namens (‘i’, Imre) füllen, die ‘y’-Lücke mit dem Wert des *zweiten* Namens (‘k’, Karl) füllen, und so *Imre liebt Karl* erhalten.

‘$L(i, k)$’ und ‘$M(k, i)$’ symbolisieren also beide ‘Imre liebt Karl’, wohingegen ‘$L(k, i)$’ und ‘$M(i, k)$’ ‘Karl liebt Imre’ symbolisieren. Weil Liebe unerwidert bleiben kann, unterscheiden sich diese Sätze in ihren Wahrheitsbedingungen.

Ein weiteres Beispiel ist vielleicht hilfreich. Fügen wir das folgende Prädikat zu unserem Symbolisierungsschlüssel hinzu:

$P(x, y)$: _____$_x$ zieht _____$_x$ _____$_y$ vor

Nun symbolisiert ‘$P(i, k)$’ ‘Imre zieht Imre Karl vor’ und ‘$P(k, i)$’ ‘Karl zieht Karl Imre vor’. Beachten Sie, das wir das gleiche Resultat auch mit dem folgenden Prädikat hätten erreichen können:

$P(x, y)$: _____$_x$ zieht sich selbst _____$_y$ vor

Die Lehre hier ist: *wenn Sie sich mit mehrstelligen Prädikaten befassen, dann achten Sie sorgfältig auf die Reihenfolge der Lücken.*

24.3 Die Reihenfolge der Quantoren

Betrachten Sie den Satz: ‘Alle lieben jemanden’. Dieser Satz ist potenziell zweideutig. Er könnte eine der folgenden Bedeutungen haben:

7. Für jede Person x gilt: x liebt zumindest eine Person.
8. Es gibt zumindest eine bestimmte Person, die von jeder Person geliebt wird.

Satz 7 wird als ‘$\forall x \exists y\, L(x, y)$’ symbolisiert und würde auf ein Dreiecksverhältnis zutreffen. Nehmen wir beispielsweise an, dass die Domäne auf Imre, Juan und Karl beschränkt ist. Nehmen wir auch an, dass Karl Imre liebt, aber nicht Juan; dass Imre Juan liebt, aber nicht Karl; und, dass Juan Karl liebt, aber nicht Imre. Dann ist Satz 7 wahr.

Satz 8 wird als '$\exists y \forall x\, L(x, y)$' symbolisiert. Er ist in der gerade beschriebenen Situation *nicht* wahr. Nehmen wir wieder an, dass unsere Domäne auf Imre, Juan und Karl beschränkt ist. Dann müssen Juan, Imre und Karl allesamt zumindest ein Liebesobjekt teilen, damit der Satz wahr ist.

Dieses Beispiel veranschaulicht den Punkt, dass die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist. Quantoren zu vertauschen ist ein *Fehlschluss*. Hier ist ein Beispiel dieses Fehlschlusses, der manchmal in der Philosophie vorkommt:

Für jede Person gilt: es gibt zumindest eine Wahrheit, die sie nicht wissen kann. (∀∃)
∴ Es gibt zumindest eine Wahrheit, die keine Person wissen kann. (∃∀)

Diese Argumentstruktur ist offensichtlich ungültig. Vergleiche:

Jede/r hat eine Steuer-ID. (∀∃)
∴ Es gibt zumindest eine Steuer-ID, die jede/r hat. (∃∀)

Die Reihenfolge der Quantoren ist auch in mathematischen Definitionen wichtig. Es gibt beispielsweise einen großen Unterschied zwischen der punktweisen und gleichmäßigen Stetigkeit von Funktionen:

▹ Eine Funktion f ist *punktweise stetig* wenn

$$\forall \epsilon \forall x \forall y \exists \delta (|x - y| < \delta \rightarrow |F(x) - f(y)| < \epsilon)$$

▹ Eine Funktion f ist *gleichmäßig stetig* wenn

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |F(x) - f(y)| < \epsilon)$$

24.4 Schritte zur Symbolisierung

Symbolisierungen in der LEO können etwas kompliziert werden. Wenn Sie also einen Satz symbolisieren wollen, dann sollten sie bestimmten Schritten folgen. Wie immer ist das am Besten anhand eines Beispiels gezeigt. Betrachten Sie den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

Domäne: Personen und Delfine
$D(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Delfin
$F(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Freund von $\_\_\_\_\__y$
$B(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ besitzt $\_\_\_\_\__y$
g: Gerald

Nun versuchen wir die folgenden Sätze zu symbolisieren:

9. Gerald besitzt einen Delfin.
10. Jemand besitzt einen Delfin.
11. Alle Freude von Gerald besitzen Delfine.
12. Alle Delfinbesitzer*innen sind Freunde von Delfinbesitzer*innen.
13. Alle Freunde von Delfinbesitzer*innen besitzen einen Hund eines Freundes.

Satz 9 kann als 'Es gibt zumindest einen Delfin, den Gerald besitzt' paraphrasiert werden. Das können wir dann als '$\exists x(D(x) \wedge B(g, x))$' symbolisieren.

Satz 10 kann als 'Es gibt zumindest etwas, y, das einen Delfin besitzt'. Wenn wir den ersten Teil symbolisieren, erhalten wir '$\exists y$(y besitzt einen Delfin)'. Das Fragment, das uns übrig bleibt ist 'y besitzt einen Delfin' und ähnelt Satz 9, bis auf die Tatsache, dass es nicht von Gerald handelt. Also können wir Satz 10 mittels:

$$\exists y \exists x(D(x) \wedge B(y, x))$$

symbolisieren. Hier sollten wir kurz innehalten. Als Zwischenschritt unseres letzte Symbolisierung, schrieben wir '$\exists y$(y besitzt einen Delfin)'. Das ist *weder* ein Satz der LEO *noch* ein Satz der deutschen Sprache: das nutzt Symbole der LEO ('$\exists$', 'y') und Teile des Deutschen ('besitzt einen Delfin'). Es ist nur ein *Zwischenschritt* auf dem Weg zu einer vollständigen Symbolisierung des deutschen Satzes. Sie sollten es als ein bisschen grobe Ausarbeitung betrachten, auf einer Stufe mit den Kritzeleien, die Sie vielleicht geistesabwesend am Seitenrand dieses Buches zeichnen, während Sie sich auf ein Problem konzentrieren.

Satz 11 kann als 'Jedes x, das ein Freund Geralds ist, besitzt einen Delfin' umschrieben werden. Mit unserer Zwischenschrittstrategie schreiben wir nun:

$$\forall x\big[F(x,g) \rightarrow x \text{ besitzt einen Delfin}\big]$$

Das Fragment, das uns übrig bleibt, ist 'x besitzt einen Delfin' und ähnelt Satz 9. Allerdings wäre es ein Fehler, einfach das Folgende zu schreiben:

$$\forall x\big[F(x,g) \rightarrow \exists x(D(x) \land B(x,x))\big]$$

Denn hier hätten wir einen *Variablenkonflikt*. Der Geltungsbereich des Universalquantors '$\forall x$' ist das ganze Konditional, also muss das 'x' in '$D(x)$' vom Universalquantor gebunden werden. Aber '$D(x)$' fällt auch in den Geltungsbereich des Existenzquantors '$\exists x$'; und daher sollte 'x' in '$D(x)$' vom Existenzquantor gebunden werden. Nun macht sich Verwirrung breit: über welches 'x' reden wir? Der Satz ist im Besten Fall mehrdeutig (andernfalls Unsinn). Logiker*innen aber hassen Mehrdeutigkeit. Eine einzige Variable kann nicht von zwei Quantoren zur gleichen Zeit in Anspruch genommen werden.

Um mit unserer Symbolisierung fortzufahren, müssen wir eine andere Variable für unseren Existenzquantor wählen. Das, was wir wollen, ist so etwas wie:

$$\forall x\big[F(x,g) \rightarrow \exists z(D(z) \land B(x,z))\big]$$

Das ist eine adäquate Symbolisierung von 11.

Satz 12 kann als 'Für jedes x, das einen Delfin besitzt, gibt es zumindest einen Delfinbesitzer, mit dem x befreundet ist'. Unter Anwendung unserer Zwischenschritttaktik wird dies zu:

$$\forall x\big[x \text{ besitzt einen Delfin} \rightarrow \exists y(y \text{ besitzt einen Delfin} \land F(x,y))\big]$$

Wenn wir die Symbolisierung abschließen, erhalten wir:

$$\forall x\big[\exists z(D(z) \land B(x,z)) \to \exists y\big(\exists z(D(z) \land B(y,z)) \land F(x,y)\big)\big]$$

Hier haben wir denselben Buchstaben 'z' sowohl im Antezedens als auch im Konsequens des Konditionals verwendet, obwohl diese zwei Vorkommnisse von zwei unterschiedlichen Quantoren gebunden werden. Das passt: Es gibt hier keinen Konflikt, weil klar ist, welcher Quantor mit welcher Variable verbunden ist. Wir können die Geltungsbereiche der Quantoren so darstellen:

$$\forall x\big[\overbrace{\overbrace{\exists z(D(z) \land B(x,z))}^{\text{1ster `}\exists z\text{'}} \to \overbrace{\exists y(\overbrace{\exists z(D(z) \land B(y,z))}^{\text{2ter `}\exists z\text{'}} \land F(x,y))}^{\text{`}\exists y\text{'}}}^{\text{`}\forall x\text{'}}\big]$$

Dies zeigt, dass keine der Variablen von zwei Quantoren zur gleichen Zeit in Anspruch genommen wird.

Satz 13 ist der bis dato schwierigste. Zuerst umschreiben wir ihn als 'Jedes x, das ein Freund eines Delfinbesitzers ist, besitzt einen Delfin, den auch ein Freund von x besitzt. Unter Anwendung unserer Zwischenschritttaktik wird dies:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[x \text{ ist ein Freund eines Delfinbesitzers} \to\\ &\quad x \text{ besitzt einen Delfin, den auch ein Freund von } x \text{ besitzt}\big]\end{aligned}$$

Wir können das weiter aufteilen:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[\exists y(F(x,y) \land y \text{ besitzt einen Delfin}) \to\\ &\exists y(D(y) \land B(x,y) \land y \text{ wird von einem Freund von } x \text{ besessen})\big]\end{aligned}$$

Und weiter

$$\begin{aligned}&\forall x\big[\exists y(F(x,y) \land \exists z(D(z) \land B(y,z))) \to\\ &\qquad\qquad \exists y(D(y) \land B(x,y) \land \exists z(F(z,x) \land B(z,y)))\big]\end{aligned}$$

Und dann sind wir auch schon fertig.

24.5 Unterdrückte Quantoren

Logik kann oft helfen, die Bedeutungen deutscher Ausdrücke klar zu stellen; insbesondere, wenn Quantoren implizit belassen werden oder ihre Reihenfolge mehrdeutig oder unklar bleibt. Die Klarheit des Ausdrucks und des Denkens, die die LEO ermöglicht, kann Ihnen einen erheblichen Vorteil in der Argumentation verschaffen. Dies illustriert die folgende Passage der britischen Philosophin Mary Astell (1666–1731), in der sie gegen ihren Zeitgenossen, den Theologen William Nicholls, argumentiert. In Discourse IV: The Duty of Wives to their Husbands in seinem *The Duty of Inferiors towards their Superiors, in Five Practical Discourses* (London 1701), argumentierte Nicholls, das Frauen Männern natürlich unterlegen sind. Im Vorwort zur dritten Edition Ihres Buchs *Some Reflections upon Marriage, Occasion'd by the Duke and Duchess of Mazarine's Case* antwortet Astell wie folgt:

> 'Tis true, thro' Want of Learning, and of that Superior Genius which Men as Men lay claim to, she [Astell] was ignorant of the *Natural Inferiority* of our Sex, which our Masters lay down as a Self-Evident and Fundamental Truth. She saw nothing in the Reason of Things, to make this either a Principle or a Conclusion, but much to the contrary; it being Sedition at least, if not Treason to assert it in this Reign.
>
> For if by the Natural Superiority of their Sex, they mean that *every* Man is by Nature superior to *every* Woman, which is the obvious meaning, and that which must be stuck to if they would speak Sense, it wou'd be a Sin in *any* Woman to have Dominion over *any* Man, and the greatest Queen ought not to command but to obey her Footman, because no Municipal Laws can supersede or change the Law of Nature; so that if the Dominion of the Men be such, the *Salique Law,*[1] as unjust as *English Men* have ever thought

[1] The Salique law was the common law of France which prohibited the crown

> it, ought to take place over all the Earth, and the most glorious Reigns in the *English, Danish, Castilian*, and other Annals, were wicked Violations of the Law of Nature!
>
> If they mean that *some* Men are superior to *some* Women this is no great Discovery; had they turn'd the Tables they might have seen that *some* Women are Superior to *some* Men. Or had they been pleased to remember their Oaths of Allegiance and Supremacy, they might have known that *One* Woman is superior to *All* the Men in these Nations, or else they have sworn to very little purpose.[2] And it must not be suppos'd, that their Reason and Religion wou'd suffer them to take Oaths, contrary to the Laws of Nature and Reason of things.[3]

Wir können die verschiedenen Interpretationen von Nicholls Aussage, die Astell unterscheidet, wie folgt auflisten: Er meinte entweder, dass jeder Mann jeder Frau überlegen ist, d.h.

$$\forall x(M(x) \to \forall y(F(y) \to (x, y)))$$

oder, dass einige Männer einigen Frauen überlegen sind, d.h.

$$\exists x(M(x) \land \exists y(F(y) \land (x, y))).$$

Letzteres ist zwar wahr, aber das gleiche gilt auch für:

$$\exists y(F(y) \land \exists x(M(x) \land (y, x))).$$

(einige Frauen sind einigen Männer überlegen), sodass es "no great discovery" wäre. In der Tat, weil die Queen all ihren Untertanen überlegen ist, ist es sogar wahr, dass

$$\exists y(F(y) \land \forall x(M(x) \to (y, x))).$$

---

be passed on to female heirs.

[2] In 1706, England was ruled by Queen Anne.

[3] Mary Astell, *Reflections upon Marriage*, 1706 Preface, iii–iv, and Mary Astell, *Political Writings*, ed. Patricia Springborg, Cambridge University Press, 1996, 9–10.

Aber das ist inkonsistent mit dem “obvious meaning” von Nicholls Aussage, der ersten Interpretation. Was Nicholls sagt, ist also Hochverrat an der Königin!

Übungen

A. Unter Verwendung dieses Symbolisierungsschlüssels:

Domäne: Tiere
$A(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist ein Alligator
$M(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist eine Maus
$R(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist ein Reptil
$Z(x)$: $\underline{\qquad}_x$ lebt im Zoo
$L(x, y)$: $\underline{\qquad}_x$ liebt $\underline{\qquad}_y$
a: Amos
b: Bouncer
c: Cleo

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Wenn Cleo Bouncer liebt, dann ist Bouncer eine Maus.
2. Wenn Bouncer und Cleo Alligatoren sind, dann liebt Amos beide.
3. Cleo liebt ein Reptil.
4. Bouncer liebt alle Mäuse, die im Zoo leben.
5. Alle Mäuse, die Amos liebt, lieben ihn gleichermaßen.
6. Jede Maus, die von Cleo geliebt wird, wird auch von Amos geliebt.
7. Es gibt eine Maus, die Bouncer liebt, aber leider erwidert Bouncer diese Liebe nicht.

B. Unter Verwendung dieses Symbolisierungsschlüssels:

Domäne: Tiere
$T(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist eine Taube
$S(x)$: $\underline{\qquad}_x$ mag Samuraifilme
$G(x, y)$: $\underline{\qquad}_x$ ist größer als $\underline{\qquad}_y$

r: Rave
h: Shane
d: Daisy

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Rave ist eine Taube, die Samuraifilme mag.
2. Rave, Shane und Daisy sind Tauben.
3. Shane ist größer als Rave und Daisy ist größer als Shane.
4. Alle Tauben mögen Samuraifilme.
5. Nur Tauben mögen Samuraifilme.
6. Es gibt eine Taube, die größer als Shane ist.
7. Wenn es eine Taube gibt, die größer als Daisy ist, dann gibt es eine Taube, die größer als Shane ist.
8. Kein Tier, das Samuraifilme mag, ist größer als Shane.
9. Keine Taube ist größer als Daisy.
10. Jedes Tier, das Samuraifilme nicht mag, ist größer als Rave.
11. Es gibt ein Tier, das kleiner als Rave und größer als Shane ist.
12. Es gibt keine Taube, die kleiner als Rave und größer als Shane ist.
13. Keine Taube ist größer als sie selbst.
14. Jede Taube ist größer als eine Taube.
15. Es gibt ein Tier, das kleiner als jede Taube ist.
16. Wenn es ein Tier gibt, das größer als jede Taube ist, dann mag dieses Tier Samuraifilme nicht.

C. Unter Verwendung dieses Symbolisierungsschlüssels:

Domäne: Süßigkeiten
$S(x)$: $\_\_\_\_\__x$ beinhaltet Schokolade.
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ beinhaltet Marzipan.
$Z(x)$: $\_\_\_\_\__x$ beinhaltet Zucker.
$V(x)$: Boris hat $\_\_\_\_\__x$ versucht.
$B(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ ist besser als $\_\_\_\_\__y$.

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Boris hat noch nie Süßigkeiten probiert.
2. Marzipan beinhaltet immer Zucker.
3. Einige Süßigkeiten sind zuckerfrei.
4. Die besten Süßigkeiten beinhalten Schokolade.
5. Keine Süßigkeit ist besser als sie selbst.
6. Boris hat noch nie zuckerfreie Schokolade probiert.
7. Boris hat Marzipan und Schokolade probiert, aber nie beides in einer Süßigkeit.
8. Jede Süßigkeit mit Schokolade ist besser als alle Süßigkeiten ohne.
9. Jede Süßigkeit mit Schokolade und Marzipan ist besser als alle Süßigkeiten ohne beide.

D. Unter Verwendung dieses Symbolisierungsschlüssels:

Domäne:	Personen und Gerichte bei einem Potluck
$A(x)$:	$\underline{\hspace{3em}}_x$ ist alle.
$T(x)$:	$\underline{\hspace{3em}}_x$ steht am Tisch.
$E(x)$:	$\underline{\hspace{3em}}_x$ ist Essen.
$P(x)$:	$\underline{\hspace{3em}}_x$ ist eine Person.
$M(x, y)$:	$\underline{\hspace{3em}}_x$ mag $\underline{\hspace{3em}}_y$.
e:	Eli
f:	Francesca
g:	die Guacamole

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Alles Essen steht am Tisch.
2. Wenn die Guacamole nicht alle ist, dann steht sie am Tisch.
3. Alle mögen Guacamole.
4. Wenn jemand die Guacamole mag, dann ist das Eli.
5. Francesca mag nur jene Gerichte, die schon alle sind.
6. Francesca mag niemanden, und niemand mag Francesca.
7. Eli mag jede/n, der/die die Guacamole mag.
8. Eli mag alle, die die Personen mögen, die sie auch mag.
9. Wenn schon eine Person am Tisch steht, dann ist alles Essen schon alle.

KAPITEL 25

Identität

Betrachten wir den folgenden Satz:

1. Pavel schuldet allen Geld.

die Domäne sind Personen; damit können wir ‘allen’ mittels eines Universalquantors allein symbolisieren. Anhand des Symbolisierungsschlüssels:

$S(x, y)$: _____$_x$ schuldet _____$_y$ Geld
p: Pavel

können wir nun Satz 1 als ‘$\forall x\, S(p, x)$’ symbolisieren. Aber diese Symbolisierung hat eine komische Folge. Sie bedingt, dass Pavel jedem Element der Domäne Geld schuldet (was auch immer die Domäne beinhaltet). Pavel beinhaltet die Domäne auf jeden Fall. Also besagt unsere Symbolisierung, dass Pavel sich selbst Geld schuldet. Das wollten wir wahrscheinlich nicht aussagen. Eher wollten wir so was sagen wie:

2. Pavel schuldet allen *anderen* Geld.
3. Pavel schuldet allen, *außer Pavel*, Geld.

Aber die kursiv geschriebenen Ausdrücke können wir noch nicht symbolisieren. Um dies zu tun, fügen wir nun ein neues Symbol zur LEO hinzu.

Das Symbol ‘=’ ist ein zweistelliges Prädikat. Weil es eine besondere Bedeutung hat, werden wir es aber anders aufschreiben:

wir stellen es *zwischen* zwei Begriffe, und nicht vor sie. (Diese Praxis ist in der Mathematik Usus; erinnere dich an eine mathematische Gleichung wie $\frac{1}{2} = 0.5$.) Die besondere Bedeutung genießt '=', da wir für dieses Symbol *immer* den gleichen Symbolisierungsschlüssel nutzen:

$x = y$: $\_\_\_\_\__x$ ist identisch mit $\_\_\_\_\__y$

Dass zwei Objekte identisch sind, heißt nicht *nur*, dass sie ununterscheidbar sind, oder, dass die gleichen Dinge auf sie zutreffen. Es heißt, dass diese Objekte *dasselbe* Objekt sind.

Um zu sehen, wie wir unser neues Symbol nutzen können, lasst uns den folgenden Satz symbolisieren:

4. Pavel ist Mister Checkov.

Hierzu fügen wir das hier zu unserem Symbolisierungsschlüssel hinzu:

c: Mister Checkov

Nun kann Satz 4 als '$p = c$' symbolisiert werden. Das sagt uns, dass 'p' und 'c' auf das gleiche Objekt verweisen.

Wir können nun auch Sätze wie 2–3 symbolisieren. All diese Sätze können als 'Allen, die nicht Pavel sind, schuldet Pavel Geld' umschrieben werden. Weiter paraphrasierend erhalten wir: 'Für jedes x, wenn x nicht Pavel ist, dann schuldet Pavel x Geld'. Endlich können wir dann den Satz in der LEO symbolisieren, nämlich als '$\forall x(\neg x = p \rightarrow S(p, x))$'.

Dieser Satz beinhaltet den Ausdruck '$\neg x = p$'. Das mag zwar komisch aussehen, da das Symbol, welches der Negation '$\neg$' folgt, eine Variable und kein Prädikat ist, aber das ist kein Problem. Hier verneinen wir den ganzen Ausdruck '$x = p$'.

Zusätzlich zu Sätzen, die Worte wie 'anders', 'außer' usw. verwenden, wird das Identitätssymbol uns beim Symbolisieren von Sätzen, die Worte wie 'neben' oder 'nur' beinhalten. Hier sind ein paar Beispiele:

5. Niemand neben Pavel schuldet Hikaru Geld.
6. Nur Pavel schuldet Hikaru Geld.

Satz 5 kann als ‘Niemand, der nicht Pavel ist, schuldet Hikaru Geld’. Sagen wir, dass ‘h’ auf Hikaru verweist. Dann kann der Satz als ‘$\neg\exists x(\neg x = p \land S(x, h))$’ symbolisiert werden. Gleichfalls kann der Satz 5 als ‘für jedes x, wenn x Hikaru Geld schuldet, dann ist x Pavel’. Dann kann er als ‘$\forall x(S(x, h) \rightarrow x = p)$’ symbolisiert werden.

Satz 6 kann auf ähnliche Weise behandelt werden, aber hier gilt es eine Feinheit zu beachten. Haben Satz 5 und Satz 6 zur Folge, dass Pavel Hikaru Geld schuldet?

25.1 Es gibt zumindest ...

Wir können das Identitätsprädikat auch nutzen, um zu sagen, wie viele Objekte einer Art es gibt. Betrachten Sie beispielsweise die folgenden Sätze:

7. Es gibt zumindest einen Apfel.
8. Es gibt zumindest zwei Äpfel.
9. Es gibt zumindest drei Äpfel.

Wir nutzen den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

$A(x)$: $\underline{\qquad}_x$ ist ein Apfel.

Für Satz 7 brauchen wir die Identität nicht. Er kann als ‘$\exists x\, A(x)$’ symbolisiert werden.

Es ist verlockend, auch 8 ohne Identität zu symbolisieren. Aber betrachten Sie den Satz ‘$\exists x \exists y(A(x) \land A(y))$’. Das besagt ungefähr, dass es zumindest einen Apfel x in der Domäne gibt und zumindest einen Apfel y. Da aber nichts ausschließt, dass dies dieselben Äpfel sind, wäre dies wahr, selbst wenn es nur einen Apfel gäbe. Um sicherzustellen, dass wir von *verschiedenen* Äpfeln sprechen, brauchen wir das Identitätsprädikat. Satz 8 muss aussagen, dass die zwei Äpfel, die es zumindest gibt, nicht miteinander identisch sind. Also kann der Satz als '$\exists x \exists y((A(x) \wedge A(y)) \wedge \neg x = y)$' symbolisiert werden.

Satz 9 bedingt, dass wir von drei verschiedenen Äpfeln sprechen. Daher brauchen wir nun drei Existenzquantoren und müssen sicherstellen, dass diese jeweils von verschiedenen Äpfeln handeln:

$$\exists x \exists y \exists z[((A(x) \wedge A(y)) \wedge A(z)) \wedge ((\neg x = y \wedge \neg y = z) \wedge \neg x = z)].$$

Beachten Sie, dass es *nicht* ausreicht, '$\neg x = y \wedge \neg y = z$' zu nutzen, um zu symbolisieren, dass x, y und z alle voneinander verschieden sind. Denn unser Vorschlag wäre wahr, wenn x und y zwar verschieden sind, aber gilt, dass $x = z$. Allgemein gesprochen: um zu sagen, dass $x_1, \ldots, x_n$ alle voneinander verschieden sind, brauchen wir eine Konjunktion $\neg x_i = x_j$ für jedes bis auf Reihenfolge verschiedene Paar i und j.

25.2 Es gibt höchstens ...

Wenden wir uns nun diesen Sätzen zu:

10. Es gibt höchstens einen Apfel.
11. Es gibt höchstens zwei Äpfel.

Satz 10 kann als 'Es ist nicht der Fall, dass es zumindest *zwei* Äpfel gibt'. Das ist einfach die Negation von Satz 8:

$$\neg \exists x \exists y[(A(x) \wedge A(y)) \wedge \neg x = y]$$

Aber Satz 10 können wir auch anders symbolisieren. Der Satz bedeutet, dass Sie, wenn Sie ein Objekt auswählen, das ein Apfel ist, und dann ein weiteres Objekt auswählen, das auch ein Apfel ist, zweimal das gleiche Objekt ausgewählt haben. Wenn wir dies beachten, können wir unseren Satz auch als

$$\forall x \forall y\big[(A(x) \wedge A(y)) \rightarrow x = y\big]$$

symbolisieren. Wie wir sehen werden, sind unsere zwei Symbolisierungen äquivalent.

Ähnlicherweise kann auch Satz 11 auf zwei Weisen behandelt werden. Er kann als 'Es ist nicht der Fall, dass es zumindest *drei* Äpfel gibt'. Daher können wir:

$$\neg\exists x\exists y\exists z\big[((A(x) \land A(y)) \land A(z)) \land ((\neg x = y \land \neg x = z) \land \neg y = z)\big]$$

anbieten. Andererseits können wir den Satz auch so verstehen, dass er sagt, dass Sie, wenn Sie drei Äpfel auswählen, zumindest einen Apfel mehrmals ausgewählt haben. Das ergibt dann:

$$\forall x\forall y\forall z\big[((A(x) \land A(y)) \land A(z)) \rightarrow ((x = y \lor x = z) \lor y = z)\big]$$

25.3 Es gibt genau ...

Als letztes schauen wir uns genau benannte Mengen an:

12. Es gibt genau einen Apfel.
13. Es gibt genau zwei Äpfel.
14. Es gibt genau drei Äpfel.

Satz 12 kann als 'Es gibt *zumindest* und *höchstens* einen Apfel' umschrieben werden. Das ist einfach nur die Konjunktion der Sätze 7 und 10. Also erhalten wir:

$$\exists x A(x) \land \forall x\forall y\big[(A(x) \land A(y)) \rightarrow x = y\big]$$

Aber es ist vielleicht einfacher, Satz 12 als 'Etwas, x, ist ein Apfel und alles, was ein Apfel ist, ist einfach nur x'. So umschrieben, symbolisieren wir Satz 12 als:

$$\exists x\big[A(x) \land \forall y(A(y) \rightarrow x = y)\big]$$

Ähnlicherweise kann Satz 13 als 'Es gibt *zumindest* und *höchstens* zwei Äpfel'. Als könnten wir die folgende Symbolisierung anbieten:

$$\exists x\exists y((A(x) \land A(y)) \land \neg x = y) \land$$
$$\forall x\forall y\forall z\big[((A(x) \land A(y)) \land A(z)) \rightarrow ((x = y \lor x = z) \lor y = z)\big]$$

Effizienter ist es allerdings, wenn wir den Satz als ‘Es gibt zumindest zwei Äpfel und jeder Apfel ist einer dieser zwei Äpfel’ symbolisieren. Daraus ergibt sich dann:

$$\exists x \exists y \big[((A(x) \land A(y)) \land \neg x = y) \land \forall z (A(z) \rightarrow (x = z \lor y = z))\big]$$

Zuletzt betrachten Sie zwei weitere Sätze:

15. Es gibt genau zwei Dinge.
16. Es gibt genau zwei Objekte.

Hier ist es verlockend, ein Prädikat zu unserem Symbolisierungsschlüssel hinzuzufügen, um die deutschen Prädikate ‘_____ ist ein Ding’ oder ‘_____ ist ein Objekt’ zu symbolisieren, aber das ist nicht notwendig. Worte wie ‘Ding’ und ‘Objekt’ trennen die Spreu nicht vom Weizen: sie treffen nichtssagenderweise auf alles in unserer Domäne zu. Also können wir auf zwei Weisen symbolisieren:

$$\exists x \exists y \neg x = y \land \neg \exists x \exists y \exists z ((\neg x = y \land \neg y = z) \land \neg x = z)$$
$$\exists x \exists y \big[\neg x = y \land \forall z (x = z \lor y = z)\big]$$

Übungen

A. Erklären Sie, wieso

- ‘$\exists x \forall y (A(y) \leftrightarrow x = y)$’ eine gute Symbolisierung von ‘Es gibt genau einen Apfel’ ist.
- ‘$\exists x \exists y \big[\neg x = y \land \forall z (A(z) \leftrightarrow (x = z \lor y = z))\big]$’ eine gute Symbolisierung von ‘Es gibt genau zwei Äpfel’ ist.

KAPITEL 26

Sätze der LEO

Wir wissen nun wie wir deutsche Sätze in der LEO symbolisieren können. Nun definieren wir, was den ein Satz der LEO eigentlich ist.

26.1 Ausdrücke

Es gibt sechs verschiedene Arten von Symbolen in der LEO:

Prädikate $A, B, C, \ldots, Z$ oder mit Subskripten, falls nötig: $A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$

Namen $a, b, c, \ldots, r$ oder mit Subskripten, falls nötig $a_1, b_{224}, h_7, m_{32}, \ldots$

Variablen s, t, u, v, w, x, y, z oder mit Subskripten, falls notwendig $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$

Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Klammern (,)

Quantoren $\forall, \exists$

Wir definieren einen AUSDRUCK DER LEO als eine beliebige Reihe von Symbolen der LEO. Welche Symbole auch immer Sie aufschreiben, in welcher Anordnung auch immer, Sie kriegen einen Ausdruck der LEO heraus.

26.2 Terme und Formeln

In §6, gingen wir direkt von der Auflistung des Vokabulars der WFL zur Definition eines Satzes der WFL über. In der LEO, müssen wir einen Zwischenschritt tätigen: nämlich via den Begriff einer FORMEL. Die Idee ist, dass eine Formel ein Satz ist oder ein Ausdruck, aus dem wir einen Satz bilden können, indem wir einen Quantor vorne anstellen. Lasst uns diese Idee etwas erläutern.

Wir beginnen, indem wir den Begriff eines Terms definieren:

> Ein TERM ist ein beliebiger Name oder eine beliebige Variable.

Hier sind also ein paar Terme:

$$a, b, x, x_1 x_2, y, y_{254}, z$$

Nun definieren wir den Begriff einer atomaren Formel:

> 1. Jeder Satzbuchstabe ist eine atomare Formel.
> 2. Wenn $\mathcal{R}$ ein n-stelliges Prädikat ist und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist $\mathcal{R}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.
> 3. Wenn t_1 und t_2 Terme sind, dann ist $t_1 = t_2$ eine atomare Formel.
> 4. Nichts anderes ist eine atomare Formel.

Da wir Satzbuchstaben auch als atomare Formeln zählen, gilt jeder Satz der WFL als eine Formel der LEO (auch wenn manche natürlich keine atomaren Formeln sind).

Das Verwenden der kalligraphischen Lettern folgt den Konventionen in §8. '$\mathcal{R}$' ist also kein Prädikat der LEO. Stattdessen ist es ein Symbol unserer Metasprache (erweitertes Deutsch), das wir verwenden, um über beliebige Prädikate der LEO zu sprechen. Ähnlicherweise ist 't_1' kein Term der LEO, sondern ein Symbol der Metasprache, das wir nutzen, um über beliebige Terme der LEO zu sprechen.

Wenn wir uns 'F' als ein einstelliges Prädikat, 'G' ein dreistelliges und 'S' ein sechsstelliges Prädikat vorstellen, dann sind die folgenden Ausdrücke atomare Formeln der LEO:

D	$F(a)$
$x = a$	$G(x, a, y)$
$a = b$	$G(a, a, a)$
$F(x)$	$S(x_1, x_2, a, b, y, x_1)$

Nun, da wir wissen was atomare Formeln sind, können wir Klauseln anbieten, um beliebige Formeln zu definieren. Die ersten paar Bedingungen sind fast die gleichen wie die für die WFL.

1. Jede atomare Formel ist eine Formel.
2. Wenn $\mathscr{A}$ eine Formel ist, dann ist $\neg\mathscr{A}$ eine Formel.
3. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Formeln sind, dann ist $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ eine Formel.
4. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Formeln sind, dann ist $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ eine Formel.
5. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Formeln sind, dann ist $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ eine Formel.
6. Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Formeln sind, dann ist $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ eine Formel.
7. Wenn $\mathscr{A}$ eine Formel ist und $\mathcal{x}$ eine Variable, dann ist $\forall \mathcal{x}\, \mathscr{A}$ eine Formel.
8. Wenn $\mathscr{A}$ eine Formel ist und $\mathcal{x}$ eine Variable, dann ist $\exists \mathcal{x}\, \mathscr{A}$ eine Formel.
9. Nichts anderes ist eine Formel.

Wenn wir uns 'F' wieder als einstelliges, 'G' als dreistelliges und 'S' als sechsstelliges Prädikat vorstellen, sind hier ein paar Formeln, die wir mit unserer Definition bauen können:

$$\begin{aligned}
&F(x)\\
&G(a,y,z)\\
&S(y,z,y,a,y,x)\\
(G(a,y,z) \rightarrow\ &S(y,z,y,a,y,x))\\
\forall z(G(a,y,z) \rightarrow\ &S(y,z,y,a,y,x))\\
F(x) \wedge \forall z(G(a,y,z) \rightarrow\ &S(y,z,y,a,y,x))\\
\exists y(F(x) \wedge \forall z(G(a,y,z) \rightarrow\ &S(y,z,y,a,y,x)))\\
\forall x \exists y(F(x) \wedge \forall z(G(a,y,z) \rightarrow\ &S(y,z,y,a,y,x)))
\end{aligned}$$

Nun definieren wir den Geltungsbereich eines logischen Operators (Quantors oder Junktors). Hier folgen wir der Definition der WFL:

> Der HAUPTOPERATOR in einer Formel ist der Operator, der bei der Konstruktion dieser Formel als Letzter genutzt wurde. Der GELTUNGSBEREICH eines Operators in einer
>
> Formel ist jene Teilformel, für den dieser Operator der Hauptoperator ist.

Damit wir können wir den Geltungsbereich der Quantoren im vorhergehenden Beispiel wie folgt darstellen:

$$\overbrace{\forall x\, \overbrace{\exists y(F(x) \leftrightarrow \overbrace{\forall z(G(a,y,z) \to S(y,z,y,a,y,x))}^{\text{Geltungsbereich von } `\forall z\text{'}})}^{\text{Geltungsbereich von } `\exists y\text{'}}}^{\text{Geltungsbereich von } `\forall x\text{'}}$$

26.3 Sätze und ungebundene Variablen

In der Logik beschäftigen wir uns normalerweise mit Sätzen, die wahr oder falsch sein können. Aber viele Formeln sind keine Sätze. Betrachten wir hierzu den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

Domäne: Personen
$L(x,y)$: $\underline{\quad\quad}_x$ liebt $\underline{\quad\quad}_y$
b: Boris

Die atomare Formel ‘$L(z,z)$’ ist eine Formel, da alle atomaren Formeln Formeln sind. Aber kann sie wahr oder falsch sein? Sie denken sich vielleicht, dass sie wahr ist, wenn die Person, die ‘z’ genannt wird, sich selbst liebt, genau so wie ‘$L(b,b)$’ wahr ist genau dann, wenn Boris (die Person auf die 'b' verweist) sich selbst liebst. *Allerdings ist 'z' eine Variable und benennt kein Objekt.*

Wenn wir der Formel einen Existenzquantor voranstellen, um '$\exists z L(z, z)$' zu erhalten, dann wäre dies natürlich wahr genau dann, wenn jemand sich selbst liebt. Gleichfalls gilt: wenn wir der Formal einen Universalquantor voranstellen, um '$\forall z L(z, z)$' zu erhalten, dann wäre dies natürlich wahr genau dann, wenn alle sich selbst lieben. Der Punkt hier ist, dass wir eine Quantor brauchen, damit unsere Formel bestimmte Wahrheitsbedingungen hat.

Lasst uns diese Idee etwas präziser benennen.

> Ein Vorkommnis einer Variable x ist GEBUNDEN genau dann, wenn sie im Geltungsbereich von $\forall x$ oder $\exists x$ liegt. Ein Vorkommnis einer Variable, das nicht gebunden ist, nennen wir UNGEBUNDEN oder FREI.

Betrachten wir die folgende Formel als ein Beispiel:

$$(\forall x(E(x) \lor D(y)) \to \exists z(E(x) \to L(z, x)))$$

Der Geltungsbereich des Universalquantors '$\forall x$' ist '$\forall x(E(x) \lor D(y))$'. Also ist das erste '$x$' vom Universalquantor gebunden. Die zweiten und dritten Vorkommnisse von 'x' hingegen sind ungebunden. Gleichfalls ist auch 'y' ungebunden. Der Geltungsbereich des Existenzquantors '$\exists z$' ist schließlich '$(E(x) \to L(z, x))$'. Also ist 'z' gebunden.

Zuletzt können wir das Folgende zu Sätzen der LEO sagen:

> Ein SATZ der LEO ist eine Formel der LEO, welcher keine ungebundene Variable beinhaltet.

26.4 Klammerkonventionen

Wir werden die gleichen Klammerkonventionen annehmen wie für die WFL (vgl. §6 und §11.3.) Erstens können wir die äußersten Klammern einer Formel weglassen. Zweitens können wir eckige

Klammern, ‘[’ und ‘]’, anstatt runder Klammern nutzen, um die Lesbarkeit von Formeln zu verbessern.

Sätze der LEO können recht umständlich werden, wie wir bereits gesehen haben. Daher führen wir auch Konventionen für Konjunktionen und Disjunktionen von mehr als zwei Sätzen ein. Wir legen fest, dass $A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n$ und $A_1 \lor A_2 \lor \cdots \lor A_n$ wie folgt zu verstehen sind:

$$(\ldots(A_1 \land A_2) \land \cdots \land A_n)$$
$$(\ldots(A_1 \lor A_2) \lor \cdots \lor A_n)$$

In der Praxis bedeutet dies, dass Sie bei langen Konjunktionen und Disjunktionen Klammern weglassen dürfen. Aber denken Sie daran, dass Sie (sofern es sich nicht um die äußersten Klammern des Satzes handelt) immer noch die gesamte Konjunktion oder Disjunktion in Klammern einschließen müssen. Außerdem dürfen Sie Konjunktionen und Disjunktionen nicht mit von sich selbst verschiedenen Junktoren vermischen. Daher sind die folgenden Ausdrücke nach wie vor nicht erlaubt und wären in diesem Fall mehrdeutig:

$$A \lor B \land C \land D$$
$$B \lor C \rightarrow D$$

26.5 Superskript bei Prädikaten

Oben haben wir gesagt, dass ein n-stelliges Prädikat, gefolgt von n Termen, eine atomare Formel ist. Diese Definition hat jedoch ein kleines Problem: Die Symbole, die wir für Prädikate verwenden, geben nicht an, wie viele Stellen ein Prädikat hat. An einigen Stellen in diesem Buch haben wir den Buchstaben ‘G’ als einstelliges Prädikat verwendet; an anderen Stellen aber als dreistelliges. Wenn wir also nicht explizit angeben, ob wir ‘G’ als einstelliges oder dreistelliges Prädikat verwenden, ist es *unbestimmt*, ob ‘$G(a)$’ eine atomare Formel ist.

Es gibt einen einfachen Weg, dies zu vermeiden, den viele Lehrbücher gehen. Anstatt zu sagen, dass unsere Prädikate nur

Großbuchstaben sind (gegebenenfalls mit numerischen Subskripten), könnten wir sagen, dass sie Großbuchstaben *mit numerischen Superskripten* sind (gegebenenfalls mit numerischen Subskripten). Der Zweck der Superskripte wäre, explizit anzuzeigen, wie viele Stellen ein Prädikat hat. Bei diesem Ansatz wäre 'G^1' ein einstelliges Prädikat und 'G^3' ein (völlig anderes) dreistelliges Prädikat. Sie müssten in jedem Symbolisierungsschlüssel unterschiedliche Einträge haben. '$G^1(a)$' wäre eine atomare Formel, während '$G^3(a)$' keine atomare Formel wäre. Ebenso wäre '$G^3(a, b, c)$' eine atomare Formel, im Gegensatz zu '$G^1(a, b, c)$'.

Wir *könnten* also all unseren Prädikaten mit Superskripten ausstatten. Dies hätte den Vorteil, dass bestimmte Dinge explizit angezeigt würden. Es hätte jedoch auch den Nachteil, dass unsere Formeln viel schwieriger zu lesen wären; die Superskripte würden uns ablenken. Wir werden uns also nicht die Mühe machen, diese Änderung vorzunehmen. Unsere Prädikate schreiben wir *ohne* Superskripte auf.

Diese Konvention lässt manchmal Mehrdeutigkeit zu. Wenn eine solche Mehrdeutigkeit auftaucht–in der Praxis sehr selten–sollten Sie daher explizit sagen, wie viele Stellen Ihr(e) Prädikat(e) haben.

Übungen

A. Bestimmen Sie, welche Variablen gebunden und welche ungebunden sind.

1. $\exists x\, L(x, y) \wedge \forall y\, L(y, x)$
2. $\forall x\, A(x) \wedge B(x)$
3. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \wedge \forall y(C(x) \wedge D(y))$
4. $\forall x \exists y[R(x, y) \rightarrow (J(z) \wedge K(x))] \vee R(y, x)$
5. $\forall x_1(M(x_2) \leftrightarrow L(x_2, x_1)) \wedge \exists x_2\, L(x_3, x_2)$

KAPITEL 27

Bestimmte Beschreibungen

Betrachten Sie die folgenden Sätze:

1. Nick ist der Verräter.
2. Der Verräter ging nach Herde.
3. Der Verräter ist der Stellvertreter.

Hier haben wir einige *bestimmte Beschreibungen*: sie sollen ein *eindeutiges* Objekt benennen. Sie sind von *unbestimmten* Beschreibungen, z.B. 'Nick ist *ein* Verräter', zu unterscheiden. Ebenfalls sind sie von *generischen Aussagen*, beispielsweise '*Der* Wal ist ein Säugetier', zu unterscheiden (hier ist es unangebracht zu fragen, *welcher* Wal gemeint ist). Die Frage die sich uns stellt ist: wie sollen wir bestimmte Beschreibungen in der LEO behandeln?

27.1 Bestimmte Beschreibungen als Terme

Eine Möglichkeit wäre, neue Namen einzuführen, sobald wir auf bestimmte Beschreibungen stoßen. Aber das ist wahrscheinlich keine gute Idee. Wir wissen, dass der Verräter–wer auch immer es ist–in der Tat ein Verräter ist. Wir wollen diese Information in unserer Symbolisierung bewahren. Ein neuer Name tut das aber nicht.

Eine zweite Möglichkeit wäre, einen Operator für bestimmte Beschreibungen einzuführen: 'ι'. Die Idee wäre nun, 'der/die/das

F' als '$\imath x\, F(x)$' (gelesen als: 'das x für das gilt: $F(x)$'). Ausdrücke der Form $\imath x\, \mathscr{A}(x)$ würden sich dann so verhalten wie Namen. Für die obigen Sätze könnten wir nun den folgenden Symbolisierungsschlüssel verwenden:

Domäne: Personen
$V(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Verräter
$S(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Stellvertreter
$H(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ging nach Herde
n: Nick

Nun könnten wir 1 als '$n = \imath x\, V(x)$', 2 als '$H(\imath x\, V(x))$' und 3 als '$\imath x\, V(x) = \imath x\, S(x)$' symbolisieren.

Aber es wäre schön, wenn wir kein weiteres Symbol zur LEO hinzufügen müssten. Lasst uns ausprobieren, ob wir mit den schon vorhandenen Ressourcen auskommen.

27.2 Russells Analyse

Bertrand Russell entwickelte eine Analyse der bestimmten Beschreibungen. Kurz gesagt bemerkte er, dass, wenn wir 'der/die/das F' in einer bestimmten Beschreibung verwenden, darauf abzielen auf das (in einem bestimmten Kontext) *einzige* Objekt, das F ist, zu verweisen. Russel analysiert bestimmte Beschreibungen also wie folgt:[1]

der/die/das F ist G **genau dann, wenn** es gibt zumindest ein F *und*
es gibt höchstens ein F *und*
jedes F ist G

Eine wichtige Eigenschaft dieser Analsye ist, das der bestimmte Artikel nicht auf der rechten Seite des Bikonditionals vorkommt. Russell versucht uns ein Verständnis für bestimmte Beschreibungen zur Hand zu reichen, welches dieses nicht schon voraussetzt.

[1]Bertrand Russell, 'On Denoting', 1905, *Mind 14*, pp. 479–93; also Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919, London: Allen and Unwin, ch. 16.

Nun könnte man befürchten, dass wir sagen können, 'der Tisch ist braun', ohne anzudeuten, dass es im Universum nur einen einzigen Tisch gibt. Aber dies ist (noch) kein Gegenbeispiel zu Russells Analyse. Die Domäne wird wahrscheinlich durch den Kontext beschränkt sein (z.B. auf relevante Objekte in meiner Umgebung).

Wenn wir Russells Analyse der bestimmten Beschreibungen akzeptieren, dann können wir Sätze der Form 'der/die/das F ist G' mittels unserer LEO-Werkzeuge zur Beschreibung von Mengen symbolisieren. Die drei Konjunkte auf der rechten Seite von Russells Analyse können wir wie folgt symbolisieren:

$$\exists x F(x) \land \forall x \forall y((F(x) \land F(y)) \rightarrow x = y) \land \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

Tatsächlich könnten wir denselben Punkt sogar knackiger ausdrücken, indem wir erkennen, dass die ersten beiden Konjunktionen gerade auf die Behauptung hinauslaufen, dass es *genau* ein F gibt, und erkennen, dass die letzte Konjunktion uns sagt, dass genau dieses Objekt G ist. Äquivalent könnten wir also anbieten:

$$\exists x\big[(F(x) \land \forall y(F(y) \rightarrow x = y)) \land G(x)\big]$$

Mithilfe dieser Werkzeuge können wir nun Sätze 1–3 ohne einen neuen Operator, wie '$\imath$', symbolisieren.

Satz 1 würden wir so symbolisieren:

$$\exists x\big[V(x) \land \forall y(V(y) \rightarrow x = y) \land x = n\big].$$

Satz 2 ist ebenfalls unproblematisch:

$$\exists x\big[T(x) \land \forall y(T(y) \rightarrow x = y) \land C(x)\big].$$

Satz 3 ist etwas komplizierter, weil er zwei bestimmte Beschreibungen verkoppelt. Aber, wenn wir Russells Analyse nutzen, können wir ihn als 'Es gibt genau einen Verräter, x, und genau einen Stellvertreter, y, und $x = y$' umschreiben. Und dann können wir den Satz wie folgt symbolisieren:

$$\exists x \exists y\Big(\big[T(x) \land \forall z(T(z) \rightarrow x = z)\big] \land \big[D(y) \land \forall z(D(z) \rightarrow y = z)\big] \land x = y\Big)$$

Beachte hier, dass die Formel '$x = y$' im Geltungsbereich beider Quantoren liegen muss!

27.3 Leere bestimmte Beschreibungen

Eines der guten Merkmale von Russells Analyse ist, dass sie uns erlaubt, mit *leeren* bestimmten Beschreibungen umzugehen.

Frankreich hat zur Zeit keinen König. Wenn wir nun einen Namen, 'k', einführen würden, um den gegenwärtigen König von Frankreich zu benennen, dann würde alles schief gehen. Denken Sie an §22: Ein Name muss immer irgendein Objekt in der Domäne herausgreifen und was immer wir als unsere Domäne wählen, es wird kein Objekt enthalten, das derzeit König Frankreichs ist.

Russells Analyse vermeidet dieses Problem. Russell sagt uns, dass wir bestimmte Beschreibungen mit Prädikaten und Quantifikatoren anstelle von Namen behandeln sollen. Da Prädikate leer sein können (siehe §23), bedeutet dies, dass jetzt keine Schwierigkeiten auftreten, wenn die bestimmte Beschreibung leer ist–d.h. wenn die Beschreibung auf kein Objekt in der Domäne zutrifft.

Russells Analyse zeigt in der Tat zwei Möglichkeiten auf, wie eine Verwendung einer bestimmten Beschreibung schief gehen kann. Hier ist ein Beispiel inspiriert von Stephen Neale (1990),[2] Nehmen Sie an, dass Alex sagt, dass

4. Ich date den derzeitigen König Frankreichs.

Wir nutzen den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

a: Alex
$K(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein derzeitiger König Frankreichs
$D(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ datet $\_\_\_\_\__y$

(Der Symbolisierungsschlüssel spricht von *einem* derzeitigen König Frankreichs, nicht *dem* derzeitigen König Frankreichs; d.h. er nutzt eine unbestimmte Beschreibung.) Satz 4 symbolisieren wir

[2] Neale, *Descriptions*, 1990, Cambridge: MIT Press.

nun als '$\exists x\big[(K(x) \land \forall y(K(y) \to x = y)) \land D(a,x)\big]$'. Dieser Satz kann auf mindestens zwei Arten falsch sein:

5. Es gibt niemanden, der sowohl derzeitiger König Frankreichs ist und von dem gilt, das Alex ihn datet.
6. Es gibt genau einen derzeitigen König Frankreichs, aber Alex datet ihn nicht

Satz 5 können wir als 'Es ist nicht der Fall, dass: der derzeitige König Frankreichs und Alex daten'. Er wird dann als '$\neg\exists x\big[(K(x) \land \forall y(K(y) \to x = y)) \land D(a,x)\big]$' symbolisiert. Wir nennen dies die *äußere* Negation, da der Geltungsbereich der Negation, der ganze Satz ist. Dieser Satz ist wahr, wenn es keinen derzeitigen König Frankreichs gibt.

Satz 6 können wir als '$\exists x\big[(K(x) \land \forall y(K(y) \to x = y)) \land \neg D(a,x)\big]$' symbolisieren. Wir nennen dies die *innere* Negation, weil die Negation im Geltungsbereich der bestimmten Beschreibung liegt. Dieser Satz ist wahr genau dann, wenn es einen derzeitigen König Frankreichs gibt, der aber nicht mit Alex datet.

27.4 Possessive, 'beide', 'keines von beiden'

Wir können Russells Analyse bestimmter Beschreibungen auch verwenden, um singuläre Possessive im Deutschen zu symbolisieren. Zum Beispiel bedeutet 'Schmidts Mörder' so etwas wie 'die Person, die Schmidt ermordet hat', d.h. es handelt sich um eine "getarnte" bestimmte Beschreibung. In Russells Analyse kann der Satz

7. Schmidts Mörder ist verrückt.

auf drei Weisen falsch sein. Er kann falsch sein, weil die einzige Person, die Schmidt ermordet hat, gar nicht verrückt ist. Er kann aber auch falsch sein, wenn die bestimmte Beschreibung leer ist, nämlich wenn entweder niemand Schmidt ermordet hat (z.B. wenn Schmitt einem Autounfall erlag) oder wenn mehr als eine Person Schmidt ermordet hat.

Um Sätze zu symbolisieren, die singuläre Possessive enthalten, wie z.B. ‘Schmidts Mörder’, sollten Sie diese Sätze zunächst mit einer expliziten, bestimmten Beschreibung paraphrasieren, z.B. ‘Die Person, die Schmidt ermordet hat, ist verrückt’, und sie dann laut Russells Analyse symbolisieren. In unserem Fall würden wir den folgenden Symbolisierungsschlüssel verwenden:

$Domne$: Personen
$V(x)$: $\underline{\quad\quad}_x$ ist verrückt
$M(x, y)$: $\underline{\quad\quad}_x$ hat $\underline{\quad\quad}_y$ ermordet
s: Schmidt

Nun erhalten wir die folgende Symbolisierung: ‘$\exists x\big[M(x, s) \wedge \forall y(M(y, s) \rightarrow x = y) \wedge V(x)\big]$’.

Russells Analyse können wir auch auf ‘beide’ und ‘keine/r von beiden’ anwenden. ‘Beide Fs sind G’ besagt, dass es genau zwei Fs gibt und jedes dieser Objekte ist G. ‘Keines von beiden Fs ist G’ besagt, dass es genau zwei Fs und keines dieser Objekte ist G. In der LEO schauen die Symbolisierungen dann so aus:

$$\exists x \exists y\big[F(x) \wedge F(y) \wedge \neg x = y \wedge \\ \forall z(F(z) \rightarrow (x = z \vee y = z)) \wedge G(x) \wedge G(y)\big]$$
$$\exists x \exists y\big[F(x) \wedge F(y) \wedge \neg x = y \wedge \\ \forall z(F(z) \rightarrow (x = z \vee y = z)) \wedge \neg G(x) \wedge \neg G(y)\big]$$

Vergleichen Sie diese Symbolisierungen mit unseren Symbolisierungen für ‘Genau zwei Fs sind Gs’ aus Abschnitt 25.3, d.h. unsere Symbolisierungen von ‘Es gibt genau zwei Dinge, die sowohl F und G sind’:

$$\exists x \exists y\big[(F(x) \wedge G(x)) \wedge (F(y) \wedge G(y)) \wedge \neg x = y \wedge \\ \forall z((F(z) \wedge G(z)) \rightarrow (x = z \vee y = z))\big]$$

Der Unterschied zwischen diesen Symbolisierungen und der von ‘beide Fs sind Gs’ liegt im Antezedens des Konditionals. Für ‘genau zwei F sind G’ verlangen wir nur, dass es keine Fs gibt, *die auch* Gs sind, außer x und y. Im Gegensatz dazu bedingt ‘beide Fs sind G’, dass es, neben x und y, keine anderen Fs gibt, ob sie

Gs sind oder nicht. Mit anderen Worten, 'beide Fs sind G' hat zur Folge, dass genau zwei Fs Gs sind. Allerdings hat 'genau zwei Fs sind G' nicht zur Folge, dass beide Fs G sind (es könnte ein drittes F geben, das nicht G ist).

27.5 Ist Russells Analyse adäquat?

Wie gut ist Russells Analyse bestimmter Beschreibungen? Diese Frage wird in einer umfangreichen philosophische Literatur behandelt; hier werden wir uns auf zwei Beobachtungen beschränken.

Die eine Sorge konzentriert sich auf Russells Analyse leerer bestimmter Beschreibungen. Wenn es kein F gibt, dann sind nach Russells Analyse sowohl 'das F ist G' als auch 'das F ist kein G' falsch. P.F. Strawson hingegen schlug vor, dass solche Sätze nicht als falsch angesehen werden sollten, sondern dass eine ihrer *Voraussetzungen* fehlschlägt und sie daher als *weder* wahr *noch* falsch behandelt werden sollten.[3]

Wenn wir hier mit Strawson übereinstimmen, müssen wir unsere Logik abändern. Denn in unserer Logik gibt es nur zwei Wahrheitswerte ("wahründ falsch") und jedem Satz ist genau einer dieser Wahrheitswerte zugeordnet.

Aber es gibt Gründe, Strawsons Sorge abzulehnen. Strawson appelliert an unsere sprachlichen Intuitionen, aber es ist nicht klar, ob sie sehr robust sind. Zum Beispiel: Ist es nicht einfach nur *falsch*, dass Alex den gegenwärtigen König von Frankreich datet, wenn es gegenwärtig keinen König von Frankreich gibt?

Keith Donnellan äußerte eine zweite Sorge, die wir (sehr grob) nachvollziehen können, wenn wir einen Fall einer Identitätsverwechslung betrachten.[4] Zwei Männer stehen in der Ecke: ein sehr großer Mann, der etwas trinkt, das wie ein Martini aus-

---

[3]P.F. Strawson, 'On Referring', 1950, *Mind 59*, pp. 320–34.

[4]Keith Donnellan, 'Reference and Definite Descriptions', 1966, *Philosophical Review 77*, pp. 281–304.

sieht, und ein sehr kleiner Mann, der etwas trinkt, das wie ein Glas Wasser aussieht. Als er sie sieht, sagt Malika:

8. Der Martinitrinker ist sehr groß!

Laut Russells Analyse symbolisieren wir diesen Satz wie folgt:

8′. Es gibt genau einen Martinitrinker [in der Ecke] und alle Martinitrinker [in der Ecke] sind sehr groß.

Nehmen wir nun an, dass der sehr große Mann tatsächlich *Wasser* aus seinem Martini-Glas trinkt, während der sehr kleine Mann Martini aus seinem Wasserglas trinkt. Nach Russells Analyse hat Malika etwas Falsches gesagt, aber wollen wir nicht sagen, dass Malika etwas *Wahres* gesagt hat?

Wieder könnte man sich fragen, wie klar unsere Intuitionen zu diesem Fall sind. Wir sind uns alle einig, dass Malika die Absicht hatte, einen bestimmten Mann zu benennen und etwas Wahres über ihn zu sagen (dass er sehr groß ist). Nach Russells Analyse benannte sie tatsächlich einen anderen Mann (den kleinen) und sagte folglich etwas Falsches über ihn aus. Aber vielleicht brauchen die Befürworter von Russells Analyse nur zu erklären, warum Malika ihre Absicht nicht in die Tat umsetzen konnte, weshalb sie also etwas Falsches gesagt hat. Diese Aufgabe ist aber einfach erledigt: Malika sagte etwas Falsches aus, weil sie falsche Überzeugungen über die Getränke der Männer hatte; wenn diese Überzeugungen wahr gewesen wären, dann hätte sie auch etwas Wahres ausgesagt.[5]

Hier noch viel mehr zu sagen würde uns in tiefe philosophische Gewässer führen. Das wäre nicht schlecht, aber es würde uns von unserem unmittelbaren Ziel ablenken, die formale Logik zu erlernen. Deshalb beharren wir erst einmal auf Russells Analyse bestimmter Beschreibungen, wenn es darum geht, Sätze in

[5] Bei weitergehendem Interesse dazu empfehle ich Saul Kripke, ‘Speaker Reference and Semantic Reference’, 1977, in French et al (eds.), *Contemporary Perspectives in the Philosophy of Language*, Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 6-27.

der LEO zu symbolisieren. Sie ist das Beste, was wir anbieten können, ohne unsere Logik wesentlich abzuändern, und ist als Analyse durchaus vertretbar.

Übungen

A. Anhand des folgenden Symbolisierungsschlüssels:

Domäne: Personen
$K(x)$: _____$_x$ kennt den Code.
$S(x)$: _____$_x$ ist ein Spion.
$V(x)$: _____$_x$ ist Vegetarier.
$T(x,y)$: _____$_x$ traut _____$_y$.
h: Hofthor
i: Ingmar

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Hofthor traut einem Vegetarier.
2. Alle, die Ingmar trauen, trauen einem Vegetarier.
3. Alle, die Ingmar trauen, trauen jemandem, der einem Vegetarier traut.
4. Nur Ingmar kennt den Code.
5. Ingmar traut Hofthor, aber niemandem sonst.
6. Die Person, die den Code kennt, ist Vegetarierin.
7. Die Person, die den Code kennt, ist keine Spionin.

B. Anhand des folgenden Symbolisierungsschlüssels:

Domäne: Tiere auf der Welt
$B(x)$: _____$_x$ steht in Bauer Brauns Feld.
$P_1(x)$: _____$_x$ ist ein Pferd.
$P_2(x)$: _____$_x$ ist ein Pegasus.
$F(x)$: _____$_x$ hat Flügel.

symbolisieren Sie die folgenden Sätze in der LEO:

1. Es gibt zumindest drei Pferde auf der Welt.

2. Es gibt zumindest drei Tiere auf der Welt.
3. Es steht mehr als ein Pferd in Bauer Brauns Feld.
4. Es stehen drei Pferde in Bauer Brauns Feld.
5. Es gibt genau ein Tier mit Flügeln in Bauer Brauns Feld; alle anderen Tiere sind flügellos.
6. Der Pegasus ist ein geflügeltes Pferd.
7. Das Tier, das in Bauer Brauns Feld steht, ist kein Pferd.
8. Das Pferd, das in Bauer Brauns Feld steht, hat keine Flügel.

C. In diesem Kapitel haben wir 'Nick ist der Verräter' als '$\exists x(V(x) \land \forall y(V(y) \rightarrow x = y) \land x = n)$' symbolisiert. Erkläre wieso die folgenden Alternativen ebenso gute Symbolisierungen sind:

- $V(n) \land \forall y(V(y) \rightarrow n = y)$
- $\forall y(V(y) \leftrightarrow y = n)$

KAPITEL 28
Mehrdeutigkeit

In Kapitel 7 betonten wir, dass deutsche Sätze mehrdeutig sein können und, dass Sätze der WFL *nicht* mehrdeutig sein können.

Eine wichtige Anwendung dieses Unterschieds besteht darin, dass die strukturelle Mehrdeutigkeit deutscher Sätze oft durch verschiedene Symbolisierungen geradegerückt werden kann. Eine häufige Quelle der Mehrdeutigkeit ist die Mehrdeutigkeit der Geltungsbereiche von Operatoren: hier stellt der deutsche Satz nicht klar, was im Geltungsbereich seiner Operatoren liegt. Mehrere Interpretationen sind daher möglich. In der LEO hingegen hat jeder Junktor und Quantor einen genau festgelegten Geltungsbereich, sodass immer feststeht, ob einer von ihnen im Geltungsbereich eines anderen vorkommt oder nicht.

Betrachten Sie als Beispiel den folgenden Satz:

1. Nur junge Katzen sind verspielt.

Unserem bestehenden Schema nach, symbolisieren wir diesen Satz wie folgt:

$$\forall x(V(x) \rightarrow (J(x) \land K(x)))$$

Die Bedeutung dieses LEO Satzes ist ungefähr ‘Wenn ein Tier verspielt ist, dann ist es eine junge Katze’. (Wir nehmen hier an, dass die Domäne Tiere umfasst.) Aber das entspricht wahrscheinlich nicht der Bedeutung, die wir mit 1 ausdrücken wollen. Wahrscheinlich wollen wir nur sagen, dass *alte* Katzen nicht verspielt sind. Anders ausgedrückt: wir wollen sagen, dass, wenn etwas eine Katze ist und verspielt ist, dann muss es jung sein. Das würden wir so symbolisieren:

$$\forall x((K(x) \land V(x)) \to J(x))$$

Unser Satz erlaubt auch noch eine dritte Lesart. Nehmen wir an, wir unterhalten uns über junge Tiere und ihre Eigenschaften. Und nehmen wir an, dass wir sagen wollen, dass unter all den jungen Tieren nur die Katzen verspielt sind. Diese Lesart könnten wir wie folgt symbolisieren:

$$\forall x((J(x) \land V(x)) \to K(x))$$

Die letzten beiden Lesarten können im Deutschen hervorgehoben werden, indem die Betonung entsprechend gesetzt wird. Um z.B. die letzte Interpretation nahezulegen, würden Sie sagen: 'Nur junge *Katzen* sind verspielt', und um die zweite Lesart zu erhalten, würden Sie sagen: 'Nur *junge* Katzen sind verspielt'. Die allererste Lesart kann hingegen durch das Betonen von sowohl 'jungen' als auch 'Katzen' nahegelegt werden: 'Nur *junge Katzen* sind verspielt' (aber nicht alte Katzen oder Hunde jeden Alters).

In Kapitel 24.3 und 24.5 betonten wir, dass die Reihenfolge der Quantoren einen Unterschied macht. Dieser Punkt ist hier wieder relevant, weil im Deutschen die Reihenfolge der Quantoren nicht immer klar ist. Wenn wir sowohl Universal- als auch Existenzquantor in einem Satz verwenden, dann kann es sein, dass die Geltungsbereiche der Quantoren mehrdeutig sind. Betrachten Sie:

2. Alle sahen einen Film.

Dieser Satz ist mehrdeutig. Einer Lesart nach, bedeutet er, dass es einen Film gab, den alle sahen. Der zweiten Lesart nach, bedeutet der Satz, dass alle einen Film sahen, aber nicht unbedingt den gleichen. Die zwei Lesarten können wir wie folgt symbolisieren:

$$\exists x(F(x) \land \forall y(P(y) \to S(y, x)))$$
$$\forall y(P(y) \to \exists x(F(x) \land S(y, x)))$$

Wir nehmen hier an, dass die Domäne (zumindest) Personen und Filme beinhaltet, und, dass der Symbolisierungsschlüssel so aussieht:

$P(y)$: $\_\_\_\_\__y$ ist eine Person,
$F(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist ein Film
$S(y, x)$: $\_\_\_\_\__y$ sah $\_\_\_\_\__x$.

In der ersten Symbolisierung hat der Existenzquantor einen *weiten Geltungsbereich*, der Universalquantor dagegen hat einen *engen* Geltungsbereich und liegt im Geltungsbereich des Existenzquantors. In der zweiten Symbolisierung läuft es umgekehrt: der Existenzquantor hat hier einen engen und der Universalquantor einen weiten Geltungsbereich.

In Kapitel 27 trafen wir eine weitere Mehrdeutigkeit an, die auftritt, wenn eine bestimmte Beschreibung mit einer Negation interagiert. Hier ist Russells eigenes Beispiel:

3. Der König Frankreichs ist nicht glatzig.

Wenn die bestimmte Beschreibung weiten Geltungsbereich hat und wir 'nicht' als eine 'innere' Negation interpretieren, dann interpretieren wir Satz 3 so, dass er die Existenz eines einzelnen König Frankreichs bedingt, welcher nicht glatzig ist. Diese Lesart symbolisieren wir als '$\exists x\big[K(x) \land \forall y(K(y) \to x = y)) \land \neg G(x)\big]$'. Der anderen Lesart nach, negiert 'nicht' den ganzen Satz 'Der König Frankreichs ist glatzig'. Diese Lesart symbolisieren wir als '$\neg\exists x\big[K(x) \land \forall y(K(y) \to x = y)) \land G(x)\big]$'. Im ersten Fall hat die bestimmte Beschreibung einen weiten Geltungsbereich, im zweiten einen engen Geltungsbereich.

Übungen

A. Jeder der folgenden Sätze ist mehrdeutig. Stellen Sie einen Symbolisierungsschlüssel zur Verfügung und symbolisieren Sie alle Lesarten.

1. Niemand mag einen Kater.
2. Holmes fand nur rotes Haar am Tatort.
3. Schmidts Mörder wurde nicht verhaftet.

B. Russel gab in seinem Artikel ‘On Denoting’, das folgende Beispiel:

> I have heard of a touchy owner of a yacht to whom a guest, on first seeing it, remarked, ‘I thought your yacht was larger than it is’; and the owner replied, ‘No, my yacht is not larger than it is’.

Erklären Sie, was hier vonstattengeht.

TEIL VI

Interpretationen

KAPITEL 29

Extensionalität

Die WFL ist eine wahrheitsfunktionale Sprache. Ihre Junktoren sind alle wahrheitsfunktional, und alles, was wir mit der WFL tun können, ist, Sätzen bestimmte Wahrheitswerte zuzuweisen. Wir können dies *direkt* tun. Zum Beispiel können wir festlegen, dass der WFL-Satz 'P' wahr ist. Alternativ können wir dies *indirekt* tun, indem wir einen Symbolisierungsschlüssel anbieten:

P: Big Ben ist in London

Wie wir in §10 gesagt haben, ist ein Symbolisierungsschlüssel *nur* ein Mittel, um 'P's Wahrheitswert festzulegen. Der Symbolisierungsschlüssel besagt ungefähr:

- Der WFL Satz 'P' ist wahr gdw Big Ben in London ist.

Und wir betonten in §10, dass die WFL nicht mit Bedeutungsunterschieden umgehen kann, die über bloße Unterschiede im Wahrheitswert hinausgehen.

29.1 Symbolisierung und Übersetzung

Die LEO hat ähnliche Einschränkungen. Sie geht über bloße Wahrheitswerte hinaus, da sie uns ermöglicht, Sätze in Terme, Prädikate und Quantoren zu zerlegen. Dies lässt uns betrachten, was auf ein bestimmtes Objekt, zumindest ein oder alle Objekten zutrifft. *Aber das ist alles.*

Um dies zu erklären, betrachten Sie den folgenden Symbolisierungsschlüssel:

$D(x)$: _____$_x$ unterrichtet Logik in Dortmund

Diese Bestimmung hat nicht zur Folge, dass die *Bedeutung* des deutschen Prädikats mit der des LEO-Prädikats übereinstimmt. Wir schreiben lediglich so etwas vor wie:

- '$D(x)$' und '_____$_x$ unterrichtet Logik in Dortmund' treffen auf die gleichen Objekte zu.

Also:

- '$D(x)$' trifft auf genau jene Objekte zu, die in Dortmund Logik unterrichten (welche auch immer das sind).

Dies ist ein *indirekter* Weg, um festzulegen, auf welche Dinge ein Prädikat zutrifft. Alternativ können wir die Objekte, auf die ein Prädikat zutrifft, auch *direkt* festlegen. Zum Beispiel können wir festlegen, dass '$D(x)$' auf Simon Wimmer allein zutrifft. Wie es der Zufall will, hätte diese direkte Bestimmung dasselbe Resultat wie die indirekte Bestimmung, da Simon, und nur Simon, in Dortmund Logik unterrichtet. Beachten Sie jedoch, dass die deutschen Prädikate '_____ ist Simon Wimmer' und '_____ lehrt Logik in Dortmund' sehr unterschiedliche Bedeutungen haben!

Der Punkt ist, dass die LEO keine Ressourcen für den Umgang mit bestimmten Bedeutungsnuancen hat. Wenn wir die LEO interpretieren, dann denken wir nur daran, worauf die Prädikate zutreffen, unabhängig davon, ob wir diese Objekte direkt oder indirekt bestimmen. Die Objekte, auf die ein Prädikat zutrifft, nennen wir die EXTENSION dieses Prädikats. Wir sagen, dass die LEO eine EXTENSIONALE Sprache ist, weil die LEO keine Bedeutungsunterschiede zwischen Prädikaten mit derselben Extension erfasst.

Daher sprechen wir vom *Symbolisieren* deutscher Sätze in der LEO. Es ist fraglich, ob wir übersetzen, da eine Übersetzung die Bedeutung (zumindest großteils) erhalten sollte.

29.2 Extensionen

Wir können direkt festlegen, auf welche Objekte Prädikate zutreffen sollen. Und unsere Bestimmungen können so willkürlich sein, wie wir wollen. Wir könnten zum Beispiel festlegen, dass '$H(x)$' auf die folgenden, und nur die folgenden, Objekte zutrifft:

Justin Trudeau
die Zahl π
jede höchste F-Taste auf jedem Klavier

Zusätzlich zu dieser Interpretation, lasst uns den folgenden Symbolisierungsschlüssel annehmen:

j: Justin Trudeau
a: Angela Merkel
p: die Zahl π

Nun sind '$H(j)$' und '$H(p)$' wahr, laut dieser Interpretation, aber '$H(a)$' falsch, da Angela Merkel nicht in unserer Bestimmung erwähnt wurde.

Dieser Prozess der expliziten Bestimmung wird manchmal als die Festlegung der *Extension* eines Prädikats beschrieben. Beachten Sie, dass in der eben genannten Bestimmung die von uns aufgeführten Objekte keine besonderen Gemeinsamkeiten haben. Die Logik kümmert sich nicht darum, was wir Menschen (zu einer bestimmten Zeit) für "natürlich zusammenpassend" halten.

29.3 Mehrstellige Prädikate

All dies ist recht einfach zu verstehen, wenn wir uns auf einstellige (oder eingliedrige) Prädikate konzentrieren, aber es wird komplizierter, wenn wir zweistellige Prädikate betrachten. Betrachten Sie einen Symbolisierungsschlüssel wie:

$L(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ liebt $\_\_\_\_\__y$

Angesichts dessen, was wir oben gesagt haben, sollte dieser Symbolisierungsschlüssel wie folgt gelesen werden:

- '$L(x, y)$' und '$\_\_\_\_\__x$ liebt $\_\_\_\_\__y$' treffen auf die gleichen Objekte zu.

Also:

- '$L(x, y)$' trifft auf x und y (in dieser Reihenfolge) zu genau dann, wenn x y liebt.

Es ist wichtig, dass wir hier auf die Reihenfolge bestehen, da Liebe nicht immer erwidert wird. (Beachten Sie, dass 'x' und 'y' hier rechts Symbole des erweiterten Deutschen sind und *verwendet* werden. Im Gegensatz dazu sind 'x' und 'y' in '$L(x, y)$' Symbole der LEO und werden *erwähnt*).

Hier haben wir eine indirekte Festlegung. Wie funktioniert eine *direkte* Festlegung für zweistellige Prädikate? Wenn wir *einfach* Objekte auflisten, auf die '$L(x, y)$' zutrifft, dann wissen wir nicht, welche die Liebenden und welche die Geliebten sind. Diese Information müssen wir anderweitig in unsere explizite Bestimmung integrieren.

Um das zu tun, legen wir fest, worauf zweistellige Prädikate zutreffen, indem wir *Objektpaare* bestimmen, wo die Reihenfolge der Objekte im Paar wichtig ist. Auf diese Art können wir zum Beispiel festlegen, dass '$B(x, y)$' auf diese, und nur diese Objektpaare zutrifft:

$$\langle \text{Lenin, Marx} \rangle$$
$$\langle \text{de Beauvoir, Sartre} \rangle$$
$$\langle \text{Sartre, de Beauvoir} \rangle$$

Hier informieren uns die Winkelklammern über die Reihenfolge der Paare. Lasst uns nun noch den folgenden Symbolisierungsschlüssel verwenden:

l: Lenin
m: Marx

b: de Beauvoir
r: Sartre

Dann ist '$B(l, m)$' wahr, weil ⟨Lenin, Marx⟩ auf unserer Liste steht. '$B(m, l)$' hingegen ist falsch, weil ⟨Marx, Lenin⟩ nicht auf unserer Liste steht. Aber sowohl '$B(b, r)$' als auch '$B(r, b)$' sind wahr, weil sowohl ⟨de Beauvoir, Sartre⟩ als auch ⟨Sartre, de Beauvoir⟩ in unserer Liste zu finden sind.

Um diese Ideen zu präzisieren, müssten wir eine elementare *Mengenlehre* einführen. Die Mengenlehre verfügt über formale Werkzeuge, die es uns erlauben, mit Extensionen, geordneten Paaren usw. umzugehen. Die Mengenlehre wird in diesem Buch jedoch nicht behandelt. Daher werden wir diese Ideen auf einer unpräzisen Ebene belassen.

29.4 Semantik für Identität

Identität ist ein besonderes Prädikat der LEO. Wir schreiben es etwas anders als andere zweistellige Prädikate: '$x = y$' anstelle von '$I(x, y)$' (zum Beispiel). Wichtiger ist jedoch, dass seine Interpretation ein für alle Mal festgelegt ist.

Wenn sich zwei Namen auf dasselbe Objekt beziehen, dann ändert die Vertauschung eines Namens durch einen anderen nicht den Wahrheitswert eines Satzes. Wenn also 'a' und 'b' dasselbe Objekt bezeichnen, dann ist Folgendes wahr:

$$A(a) \leftrightarrow A(b)$$
$$B(a) \leftrightarrow B(b)$$
$$R(a, a) \leftrightarrow R(b, b)$$
$$R(a, a) \leftrightarrow R(a, b)$$
$$R(c, a) \leftrightarrow R(c, b)$$
$$\forall x\, R(x, a) \leftrightarrow \forall x\, R(x, b)$$

Einige Philosoph*innen waren auch vom Umkehrschluss dieser Behauptung überzeugt. Sie dachten, dass, wenn genau die gleichen Sätze (die nicht '=' enthalten) auf a und b zutreffen, a und b

genau dasselbe Objekt sind. Dies ist eine höchst umstrittene philosophische Behauptung–manchmal als die Identität der Ununterscheidbaren bezeichnet–und unsere Logik wird sie nicht voraussetzen. Wir lassen zu, dass genau dieselben Sätze auf zwei *unterschiedliche* Objekte zutreffen können.

Um das zu illustrieren, sehen wir uns die folgende Interpretation an:

domain: P.D. Magnus, Tim Button
a: P.D. Magnus
b: Tim Button
- Alle Prädikate treffen auf nichts zu.

Nehmen wir an, 'A' ist ein einstelliges Prädikat; dann ist sowohl '$A(a)$' als auch '$A(b)$' falsch. Also ist '$A(a) \leftrightarrow A(b)$' wahr. Wenn '$R$' ein zweistelliges Prädikat ist, dann ist sowohl '$R(a, a)$' als auch '$R(a, b)$' falsch. Daher ist '$R(a, a) \leftrightarrow R(a, b)$' wahr. Und so geht es: Jede atomare Formel, die '=' nicht beinhaltet, ist falsch. Dementsprechend ist jeder Bikonditional, das solche Formeln verbindet, wahr. Dennoch sind Tim Button und P.D. Magnus zwei verschiedene Personen.

29.5 Interpretationen

Wir definierten eine BEWERTUNG in der WFL als eine beliebige Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Satzbuchstaben. In der LEO werden wir etwas Ähnliches sagen. Eine INTERPRETATION besteht aus vier Dingen:

- der Spezifikation einer Domäne
- für jeden Satzbuchstaben, einen Wahrheitswert
- für jeden Namen, eine Zuordnung eines Objekts aus der Domäne zu diesem Namen
- für jedes Prädikat (außer '='), eine Bestimmung der Objekte, auf die das Prädikat zutrifft (und die Reihenfolge in welcher es das tut).
  ('=' hat bereits eine Interpretation.)

Die Symbolisierungsschlüssel, die wir bisher verwendet haben, geben uns folglich ein sehr bequemes Mittel, eine Interpretation zu präsentieren. Wir werden dieses Mittel auch in diesem Kapitel verwenden.

Allerdings ist es oft auch bequem, Interpretationen *diagrammatisch* darzustellen. Nehmen Sie an, wir wollen nur das zweistellige Prädikat '$R(x, y)$' betrachten. Dann können wir es repräsentieren, indem wir einen Pfeil zwischen zwei Objekten zeichnen und festlegen, dass '$R(x, y)$' auf x und y (in dieser Reihenfolge) zutrifft genau dann, wenn ein Pfeil von x auf y zeigt. Zum Beispiel:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] & 3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm könnten wir nutzen, um eine Interpretation zu beschreiben, deren Domäne die ersten vier natürlichen Zahlen sind und '$R(x, y)$' so interpretiert, dass es auf und nur auf

$$\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle$$

zutrifft. Gleichfalls könnten wir dieses Diagramm anbieten:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[dr, leftrightarrow] & 2 \\ 4 & 3 \arrow[l] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

um eine Interpretation mit der gleichen Domäne darzustellen, welche allerdings die Extension von '$R(x, y)$' wie folgt bestimmt:

$$\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle$$

Wenn wir wollten, könnten wir unsere Diagramme komplexer gestalten. Zum Beispiel könnten wir Namen als Beschriftungen für bestimmte Objekte hinzufügen. Gleichermaßen könnten wir, um die Extension eines einstelligen Prädikats zu symbolisieren, einfach einen Kreis um bestimmte Objekte zeichnen und festlegen, dass das Prädikat '$H(x)$' auf die so eingekreisten Objekte (und nur sie) zutrifft.

KAPITEL 30

Wahrheit in der LEO

Da Interpretationen uns unter anderem sagen, welche Prädikate auf welche Objekte zutreffen, bestimmen sie, welche atomaren Sätze wahr und welche falsch sind. Nun müssen wir aber genau sagen, was es bedeutet, wenn ein willkürlicher LEO-Satz in einer Interpretation wahr oder falsch ist.

Wir wissen dank §26, dass es drei verschiedene Arten von Sätzen in der LEO gibt:

- atomare Sätze
- Sätze, deren Hauptoperator ein Junktor ist
- Sätze, deren Hauptoperator ein Quantor ist

Wir müssen getrennt erklären, was es bedeutet, wenn solche Sätze wahr oder falsch sind.

Um unsere Erklärung verständlich zu machen, werden wir immer wieder die folgende Interpretation verwenden:

Domäne:	Alle Personen, die vor 2000 geboren wurden
a:	Aristoteles
b:	Beyoncé
$P(x)$:	$\_\_\_\_\__x$ ist Philosoph*in
$R(x, y)$:	$\_\_\_\_\__x$ wurde vor $\_\_\_\_\__y$ geboren

30.1 atomare Sätze

Die Wahrheit atomarer Sätze ist recht einfach zu erklären. Für Satzbuchstaben gilt: die Interpretation legt fest, welche wahr und welche falsch sind. Der Satz '$P(a)$' ist wahr genau dann, wenn '$P(x)$' auf 'a' zutrifft. Unserer Interpretation nach, ist das der Fall, genau dann, wenn Aristoteles Philosoph ist. Das ist der Fall. Also ist der Satz wahr. Gleichfalls ist '$P(b)$' unserer Interpretation nach falsch.

Ähnlicherweise ist '$R(a, b)$' unserer Interpretation nach wahr genau dann, wenn das Objekt, auf das 'a' verweist, vor dem Objekt, das 'b' benennt, geboren wurde. Da Aristoteles vor Beyoncé geboren wurde ist '$R(a, b)$' wahr. Gleichfalls ist '$R(a, a)$' falsch: Aristoteles wurde nicht vor Aristoteles geboren.

Die Wahrheit atomarer Sätze zu erklären ist also recht einfach. Wenn $\mathscr{R}$ ein n-stelliges Prädikat ist and $\mathscr{a}_1$, $\mathscr{a}_2$, ..., $\mathscr{a}_n$ Namen sind, dann gilt:

> Der Satz $\mathscr{R}(\mathscr{a}_1, \mathscr{a}_2, \ldots, \mathscr{a}_n)$ ist einer Interpretation nach wahr genau dann, wenn $\mathscr{R}$ in dieser Interpretation auf die von $\mathscr{a}_1$, $\mathscr{a}_2$, ..., $\mathscr{a}_n$ benannten Objekte (in dieser Reihenfolge) zutrifft.

Es gibt auch noch eine spezielle Art von atomarem Satz: zwei Namen, die mittels des Identitätssymbols verbunden wurden. Die Wahrheit solcher Sätze ist auch einfach zu erklären. Wenn $\mathscr{a}$ und $\mathscr{b}$ beliebige Namen sind, dann gilt:

> $\mathscr{a} = \mathscr{b}$ ist einer Interpretation nach wahr genau dann, wenn $\mathscr{a}$ und $\mathscr{b}$ in dieser Interpretation dasselbe Objekt benennen.

In unserer Beispielinterpretation ist also '$a = b$' falsch, weil Aristoteles von Beyoncé verschieden ist.

30.2 Junktoren

In §26 sahen wir, dass in der LEO, wie in der WFL, Sätze mittels der Junktoren aus Basiselementen gebaut werden können. Die Regeln für diese Junktoren sind *genau* die gleichen, wie im Fall der WFL. Hier sind sie:

> $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ ist in einer Interpretation wahr genau dann, wenn sowohl $\mathscr{A}$ als auch $\mathscr{B}$ in dieser Interpretation wahr sind.
>
> $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ ist in einer Interpretation wahr genau dann, wenn in dieser Interpretation entweder $\mathscr{A}$ wahr ist oder $\mathscr{B}$ wahr ist.
>
> $\neg\mathscr{A}$ ist in einer Interpretation wahr genau dann, wenn $\mathscr{A}$ falsch ist in dieser Interpretation.
>
> $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ ist in einer Interpretation wahr genau dann, wenn in dieser Interpretation entweder $\mathscr{A}$ falsch ist oder $\mathscr{B}$ wahr ist.
>
> $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ ist in einer Interpretation wahr genau dann, wenn in dieser Interpetation $\mathscr{A}$ den gleichen Wahrheitswert wie $\mathscr{B}$ hat.

Diese Tabelle stellt die gleiche Informationen wie die charakteristischen Wahrheitstabellen für die Junktoren dar, nur auf eine etwas andere Weise. Einige Beispiele werden dazu beitragen, die Idee zu veranschaulichen. In unserer Beispielinterpretation gilt:

- '$a = a \wedge P(a)$' ist wahr
- '$R(a, b) \wedge P(b)$' ist falsch, denn, obwohl '$R(a, b)$' wahr ist, ist '$P(b)$' falsch
- '$a = b \vee P(a)$' ist wahr
- '$\neg a = b$' ist wahr
- '$P(a) \wedge \neg(a = b \wedge R(a, b))$' ist wahr, weil '$P(a)$' wahr ist und '$a = b$' falsch

30.3 Quantoren

Die aufregende Neuerung der LEO ist die Verwendung von *Quantoren.* Aber die Wahrheitsbedingungen für quantifizierte Sätze auszudrücken ist kniffliger, als man zunächst erwarten würde.

Hier ist ein naïver erster Gedanke. Wir wollen sagen, dass '$\forall x\, F(x)$' wahr ist genau dann, wenn '$F(x)$' auf alle Objekte in der Domäne zutrifft. Das sollte nicht problematisch sein: denn unsere Interpretation bestimmt ja, auf was '$F(x)$' zutrifft.

Leider ist dieser naïve Gedanke nicht allgemein genug. Wir wollen zum Beispiel sagen könnnen, dass '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' wahr ist genau dann, wenn (ungefähr) '$\exists y\, L(x, y)$' auf alles in der Domäne zutrifft. Aber unsere Interpretation bestimmt nicht *direkt* auf was '$\exists y\, L(x, y)$' zutrifft. Doch, ob dies auf etwas zutrifft oder nicht, sollte sich allein aus der Interpretation des Prädikats 'L', der Domäne und der Bedeutung der Quantoren ergeben.

Hier ist also ein zweiter naïver Gedanke. Wir versuchen nun zu sagen, dass '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' in einer Intepretation wahr ist genau dann, wenn $\exists y\, L(\mathcal{a}, y)$ für *jeden* Namen $\mathcal{a}$, den wir in unserer Interpretation auflisten, wahr ist. Ähnlicherweise versuchen wir nun zu sagen, dass $\exists y\, L(\mathcal{a}, y)$ wahr ist genau dann, wenn $L(\mathcal{a}, \mathcal{b})$ für *zumindest einen* Namen $\mathcal{b}$, den wir in unserer Interpretation aufgelistet haben, wahr ist.

Leider funktioniert auch das nicht. Beachten Sie, dass unsere Interpretation nur *zwei* Namen, a und b auflistet. Aber die Domäne–alle Personen, die vor dem Jahr 2000 geboren wurden–umfasst viel mehr als zwei Personen. (Und wir haben nicht die Absicht, dies zu korrigieren, indem wir versuchen, alle mit Namen auszustatten.)

Hier ist also ein dritter Gedanke. (Dieser Gedanke ist nicht naïv, sondern richtig.) Obwohl es nicht der Fall ist, dass wir jedes einzelne Objekt benannt haben, *hätte* jeder Person ein Name gegeben werden können. Wir sollten uns also auf die Möglichkeit konzentrieren, eine Interpretation durch Hinzufügen eines neuen Namens zu erweitern. Wir werden einige Beispiele dafür geben, wie dies funktioniert, wobei wir uns auf unsere Beispielinterpretation konzentrieren werden. Danach stellen wir die entsprechende formale Definition vor.

In unserer Beispielinterpretation sollte '$\exists x\, R(b, x)$' wahr sein. Denn in der Domäne gibt es mit Sicherheit jemanden, der nach Beyoncé geboren wurde. Lady Gaga zum Beispiel. Falls wir unsere Beispielinterpretation erweitern würden—nur kurzfristig natürlich—indem wir bestimmen, dass der Name 'c' Lady Gaga benennt, dann wäre '$R(b, c)$' in dieser erweiterten Interpretation wahr. Das macht '$\exists x\, R(b, x)$' laut unserer ursprünglichen Interpretation wahr.

In unserer Beispielinterpretation sollte auch '$\exists x(P(x) \wedge R(x, a))$' wahr sein. Denn in unserer Domäne gibt es sicherlich jemanden, die sowohl Philosoph*in war und vor Aristoteles geboren wurde. Sokrates zum Beispiel. Wenn wir unsere Beispielinterpretation erweitern würden, und 'c' als Name für Sokrates verwendeten, dann wäre '$W(c) \wedge R(c, a)$' in dieser erweiterten Interpretation wahr. Das macht '$\exists x(P(x) \wedge R(x, a))$' laut unserer ursprünglichen Interpretation wahr.

Ein letztes Beispiel: '$\forall x \exists y\, R(x, y)$' sollte in unserer Beispielinterpretation falsch sein. Denn wir wissen zwar nicht, wer die letzte Person ist, die 1999 geboren wurde, aber es gibt sie. Und wenn wir unsere Beispielinterpretation erweitern, und 'd' als Namen für diese Person verwenden würden, dann wären wir nicht in der Lage, eine weitere Person zu finden, die wir mit einem weiteren Namen benennen könnten, und die nach d geboren wurde. Egal wen wir mit einem weiteren Namen, z.B. 'e', benennen täten, '$R(d, e)$' wäre falsch. Das macht '$\exists y\, R(d, y)$' *falsch* in unserer erweiterten Interpretation. Und das wiederum macht '$\forall x \exists y\, R(x, y)$' falsch, laut unserer ursprünglichen Interpretation.

Diese drei Beispiele geben uns einen Startpunkt für unsere formale Definition der Wahrheit von Sätzen, deren Hauptoperatoren Quantoren sind. Diese Definition erfordert aber leider einiges an Arbeit.

Nehmen Sie an, dass $\mathscr{A}$ eine Formel ist, die zumindest ein Vorkommnis der Variable x enthält, und, dass x in $\mathscr{A}$ ungebunden ist. Wir fassen dies so zusammen:

$$\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$$

Nehmen Sie auch an, dass c ein Name ist. Nun schreiben wir:

$$\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$$

um die Formel zu symbolisieren, die wir erhalten, wenn wir *jedes* Vorkommnis von x in $\mathscr{A}$ mit c ersetzen. Die resultierende Formel nennen wir eine SUBSTITUTIONSINSTANZ von $\forall x\mathscr{A}$ und $\exists x\mathscr{A}$. Dementsprechend nennen wir c den SUBSTITUIERENDEN NAMEN. Also gilt:

$$\exists x(R(e,x) \leftrightarrow F(x))$$

ist eine Substitutionsinstanz von

$$\forall y\exists x(R(y,x) \leftrightarrow F(x))$$

dessen substituierender Name 'e', und substituierte Variable 'y', ist.

Unsere Interpretation beinhaltet eine Bestimmung dazu, welche Objekte in der Domäne welchen Namen entsprechen. Nehmen Sie nun ein beliebiges Objekt der Domäne, d beispielsweise, und einen Namen c, der nicht schon in unserer Interpretation genutzt wird. Wenn unsere Interpretation $\mathbf{I}$ ist, dann können wir uns nun mit der Interpretation $\mathbf{I}[d/c]$ beschäftigen, die $\mathbf{I}$ genau entspricht, außer, dass sie *auch* den Namen c dem Objekt d zuordnet. Nun können wir sagen, dass d die Formel $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ in Interpretation $\mathbf{I}$ ERFÜLLT genau dann, wenn $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ in $\mathbf{I}[d/c]$ wahr ist. (Wenn d $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ erfüllt, dann sagen wir auch, dass $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ auf d zutrifft.)

Die Interpretation $\mathbf{I}[d/c]$ entspricht $\mathbf{I}$ genau, außer, dass sie dem Objekt d den Namen c zuordnet.

Ein Objekt d ERFÜLLT $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ in $\mathbf{I}$ genau dann, wenn $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ in $\mathbf{I}[d/c]$ wahr ist.

Zum Beispiel erfüllt Sokrates die Formel $P(x)$, weil $P(c)$ in der Interpretation $\mathbf{I}[\text{Sokrates}/c]$ wahr ist (hier ist die Interpretation):

Domäne: Alle Personen, die vor 2000 geboren wurden
a: Aristoteles
b: Beyoncé
c: Sokrates
$P(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist Philosoph*in
$R(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ wurde vor $\_\_\_\_\__y$ geboren

Mit all diesen Definitionen bewaffnet lautet die grobe Idee wie folgt. Der Satz $\forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ ist in $\mathbf{I}$ wahr genau dann, wenn für jedes Objekt d in der Domäne gilt, dass $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ in $\mathbf{I}[d/c]$ wahr ist (egal welches Objekt in der Domäne wir mit c benennen). Anders ausgedrückt: $\forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ ist wahr genau dann, wenn jedes Objekt in der Domäne $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ erfüllt. Ähnlicherweise ist der Satz $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ wahr genau dann, wenn es *zumindest ein Objekt* gibt, das $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ erfüllt (d.h. wenn $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ in $\mathbf{I}[d/c]$ für zumindest ein Objekt d wahr ist).

> $\forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ ist wahr in einer Interpretation genau dann, wenn jedes Objekt in der Domäne $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ erfüllt.
>
> $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ ist wahr in einer Interpretation genau dann, wenn zumindest ein Objekt in der Domäne $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ erfüllt.

All das hier formalisiert die intuitive Idee, die wir vorher schon ausgedrückt hatten. Das Resultat ist leider weder elegant noch allzu einfach verständlich.

Lasst uns zuletzt noch betonen, dass der Begriff eines Objekts, das eine Formel mit einer ungebundenen Variable erfüllt, auch auf Formeln mit mehr als einer ungebundenen Variable ausgedehnt werden kann. Wenn wir eine Formel $\mathscr{A}(x, y)$ mit zwei ungebundenen Variablen x and y haben, dann können wir sagen, dass ein Objektpaar $\langle a, b\rangle$ $\mathscr{A}(x, y)$ erfüllt genau dann, wenn $\mathscr{A}(c, d)$ in der Interpretation, die wir mit zwei Namen c und d für a und b erweitert haben, wahr ist. Beispielsweise erfüllt $\langle$Sokrates, Plato$\rangle$ $R(x, y)$, da $R(c, d)$ laut der folgenden Interpretation wahr ist:

Domäne: Alle Personen, die vor 2000 geboren wurden
a: Aristoteles
b: Beyoncé
c: Sokrates
d: Plato
$P(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ist Philosoph*in
$R(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ wurde vor $\_\_\_\_\__y$ geboren

Für atomare Formeln sind die Objekte, Objektpaare, etc. die sie erfüllen, genau jene, die in die angegebene Extension ihrer Prädikate fallen. Aber der Begriff der Erfüllung findet auch auf nichtatomare Formeln Anwendung. Die Formel $P(x) \land R(x, b)$ wird zum Beispiel von allen Philosoph*innen, die vor Beyoncé geboren wurden, erfüllt. Der Begriff findet sogar auf quantifizierte Formeln Anwendung. $P(x) \land \neg\exists y(P(y) \land R(y, x))$ zum Beispiel wird von allen Personen, die Philosoph*innen sind, erfüllt; und von solchen, vor denen kein*e einzige Philosoph*in geboren wurde, erfüllt.

Übungen

A. Betrachten Sie die folgende Interpretation:

- Domäne: Fatih und Benedikt
- '$A(x)$' trifft auf Fatih und Benedikt zu
- '$B(x)$' trifft nur auf Benedikt zu
- '$N(x)$' trifft auf niemanden zu.
- 'f' verweist auf Fatih

Bestimmen Sie, ob die folgenden Sätze in dieser Interpretation wahr oder falsch sind.

1. $B(f)$
2. $A(f) \leftrightarrow \neg N(f)$
3. $N(f) \rightarrow (A(f) \vee B(f))$
4. $\forall x\, A(x)$
5. $\forall x \neg B(x)$
6. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
7. $\exists x(A(x) \rightarrow N(x))$
8. $\forall x(N(x) \vee \neg N(x))$
9. $\exists x\, B(x) \rightarrow \forall x\, A(x)$

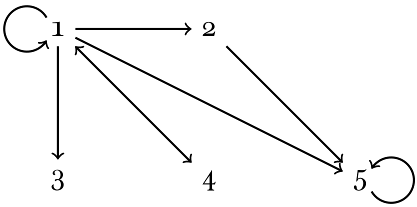
B. Betrachten Sie die folgende Interpretation:

- Domäne: Lemmy, Courtney und Eddy
- '$G(x)$' trifft auf Lemmy, Courtney und Eddy zu.
- '$H(x)$' trifft nur auf Courtney zu.
- '$M(x)$' trifft nur auf Lemmy und Eddy zu.
- 'c' verweist auf Courtney
- 'e' verweist auf Eddy

Bestimmen Sie, ob die folgenden Sätze in dieser Interpretation wahr oder falsch sind.

1. $H(c)$
2. $H(e)$
3. $M(c) \vee M(e)$
4. $G(c) \vee \neg G(c)$
5. $M(c) \rightarrow G(c)$
6. $\exists x\, H(x)$
7. $\forall x\, H(x)$
8. $\exists x\, \neg M(x)$
9. $\exists x(H(x) \wedge G(x))$
10. $\exists x(M(x) \wedge G(x))$
11. $\forall x(H(x) \vee M(x))$
12. $\exists x\, H(x) \wedge \exists x\, M(x)$
13. $\forall x(H(x) \leftrightarrow \neg M(x))$
14. $\exists x\, G(x) \wedge \exists x \neg G(x)$
15. $\forall x \exists y(G(x) \wedge H(y))$

C. Betrachten Sie die folgende diagrammatisch dargestellte Interpretation:



($R(x, y)$ trifft auf x und y (in dieser Reihenfolge) zu genau dann, wenn ein Pfeil von x auf y zeigt.) Bestimmen Sie, ob die folgenden Sätze in dieser Interpretation wahr oder falsch sind.

1. $\exists x\, R(x, x)$
2. $\forall x\, R(x, x)$
3. $\exists x \forall y\, R(x, y)$
4. $\exists x \forall y\, R(y, x)$
5. $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))$
6. $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \land R(x, z)) \to R(y, z))$
7. $\exists x \forall y\, \neg R(x, y)$
8. $\forall x(\exists y\, R(x, y) \to \exists y\, R(y, x))$
9. $\exists x \exists y(\neg x = y \land R(x, y) \land R(y, x))$
10. $\exists x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow x = y)$
11. $\exists x \forall y(R(y, x) \leftrightarrow x = y)$
12. $\exists x \exists y(\neg x = y \land R(x, y) \land \forall z(R(z, x) \leftrightarrow y = z))$

KAPITEL 31

Semantische Begriffe

Die Wahrheit in der LEO zu definieren war sehr aufwändig. Aber nun, da wir das getan haben, können wir eine Reihe anderer Begriffe definieren. Unsere Definitionen werden denen der WFL, in §12, sehr ähneln. Allerdings berufen sie sich auf *Interpretationen* anstelle von Bewertungen.

Das Symbol '$\vDash$' nutzen wir auch in der LEO:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$$

bedeutet, dass es keine Interpretation gibt, in der $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, ..., $\mathscr{A}_n$ alle wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch ist. Dementsprechend bedeutet

$$\vDash \mathscr{A}$$

dass $\mathscr{A}$ in jeder Interpretation wahr ist.

Die anderen logischen Begriffe haben entsprechende Definitionen:

- Ein LEO-Satz $\mathscr{A}$ ist eine TAUTOLOGIE genau dann, wenn $\mathscr{A}$ in jeder Interpretation wahr ist, d.h. $\vDash \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ ist ein WIDERSPRUCH genau dann, wenn $\mathscr{A}$ in jeder Interpretation falsch ist; d.h. $\vDash \neg\mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ ist GÜLTIG IN DER LEO genau dann, wenn es keine Interpretation gibt, in der die Prämissen wahr sind und die Schlussfolgerung falsch; d.h., $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$. Andernfalls ist es UNGÜLTIG IN DER LEO.

- Zwei LEO-Sätze $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ sind ÄQUIVALENT genau dann, wenn sie in genau den gleichen Interpretation wahr sind; d.h. $\mathscr{A} \vDash \mathscr{B}$ und $\mathscr{B} \vDash \mathscr{A}$.

- Die LEO-Sätze $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ sind KONSISTENT genau dann, wenn zumindest eine Interpretation beide wahr macht. Sie sind INKONSISTENT genau dann, wenn es keine solche Interpretation gibt.

KAPITEL 32

Interpretationen nutzen

32.1 Tautologien und Widersprüche

Nehmen wir an, wir wollen zeigen, dass '$\exists x\, A(x,x) \rightarrow B(d)$' keine Tautologie ist. Dazu müssen wir zeigen, dass der Satz nicht in allen Interpretation wahr ist, d.h., dass er in zumindest einer Interpretation falsch ist. Wenn wir eine Interpretation liefern, in der der Satz falsch ist, dann zeigen wir also, dass er keine Tautologie ist.

Damit '$\exists x\, A(x,x) \rightarrow B(d)$' falsch ist, muss sein Antezedens ('$\exists x\, A(x,x)$') wahr sein und das Konsequens ('$B(d)$') falsch. Um eine entsprechende Interpretation zu konstruieren, starten wir mit einer Domäne. Die Domäne klein zu halten hilft beim Bestimmen der Extensionen der Prädikate. Also beginnen wir mit einer Domäne mit nur einem Element: die Stadt Paris.

Domäne: Paris

Der Name 'd' muss auf etwas in der Domäne verweisen:

d: Paris

Wir wollen nun, dass '$\exists x\, A(x,x)$' wahr ist. Also wollen wir, dass alle Elemente der Domäne mit sich selbst in der Extension von 'A' gepaart werden. Das erreichen wir hiermit:

$A(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ ist identisch zu $\_\_\_\_\__y$

Jetzt ist '$A(d, d)$' wahr und auch '$\exists x\, A(x, x)$'. Nun wollen wir, dass '$B(d)$' falsch ist. Also darf der Referent von 'd' nicht in der Extension von 'B' sein. Das erreichen wir so:

$B(x)$: _____$_x$ ist in Deutschland

Schon haben wir eine Interpretation, in der '$\exists x\, A(x, x)$' wahr ist, aber '$B(d)$' falsch. Also gibt es eine Interpretation, in der '$\exists x\, A(x, x) \rightarrow B(d)$' falsch ist. '$\exists x\, A(x, x) \rightarrow B(d)$' ist keine Tautologie.

Genauso einfach können wir zeigen, dass '$\exists x A(x, x) \rightarrow B(d)$' kein Widerspruch ist. Wir brauchen nur eine Interpretation, in der '$\exists x A(x, x) \rightarrow B(d)$' wahr ist, d.h. eine Interpretation, in der entweder '$\exists x\, A(x, x)$' falsch ist oder '$B(d)$' wahr ist. Hier ist eine:

Domäne: Paris
d: Paris
$A(x, y)$: _____$_x$ ist identisch mit _____$_y$
$B(x)$: _____$_x$ ist in Frankreich

Das zeigt, dass es zumindest eine Interpretation gibt, in der '$\exists x A(x, x) \rightarrow B(d)$' wahr ist. '$\exists x\, A(x, x) \rightarrow B(d)$' ist also kein Widerspruch.

Um zu zeigen, dass $\mathscr{A}$ keine Tautologie ist, reicht es, eine Interpretation zu finden, in der $\mathscr{A}$ falsch ist.
Um zu zeigen, dass $\mathscr{A}$ kein Widerspruch ist, reicht es, eine Interpretation zu finden, in der $\mathscr{A}$ wahr ist.

32.2 Äquivalenz

Nehmen wir an, wir wollen zeigen, dass '$\forall x\, S(x)$' und '$\exists x\, S(x)$' nicht äquivalent sind. Dazu brauchen wir eine Interpretation, in der die zwei Sätze verschiedene Wahrheitswerte haben; einer muss wahr, der andere falsch sein. Wir beginnen mit einer Domäne. Auch hier halten wir die Domäne möglichst klein. Aber hier brauchen wir zumindest zwei Objekte. (In einer Domäne mit nur einem Element haben die Sätze den gleichen Wahrheitswert. Um das zu sehen, versuche, ein paar Interpretation mit nur einem Element zu konstruieren.) Lasst uns die Domäne so "befüllen":

Domäne: Ornette Coleman, Miles Davis

'$\exists x\, S(x)$' machen wir wahr, indem wir etwas zur Extension von 'S' hinzufügen und '$\forall x\, S(x)$' machen wir falsch, indem wir etwas aus der Extension außen vor lassen. Zum Beispiel:

$S(x)$: $\underline{\qquad}_x$ spielt Saxophon

Jetzt ist '$\exists x\, S(x)$' wahr, weil '$S(x)$' auf Ornette Coleman zutrifft. Präziser gesagt: erweitern wir unsere Interpretation, indem wir 'c' auf Ornette Coleman verweisen lassen. '$S(c)$' ist in dieser erweiterten Interpretation wahr. Also ist '$\exists x\, S(x)$' in unserer ursprünglichen Interpretation wahr. Ähnlicherweise ist '$\forall x\, S(x)$' falsch, da '$S(x)$' nicht auf Miles Davis zutrifft. Genauer gesagt: Wir erweitern unsere Interpretation, indem wir 'd' auf Miles Davis verweisen lassen. '$S(d)$' ist in dieser erweiterten Interpretation falsch. Also ist '$\forall x\, S(x)$' in unserer ursprünglichen Interpretation falsch. Wir haben eine *Gegeninterpretation* zur Aussage, dass '$\forall x\, S(x)$' und '$\exists x\, S(x)$' äquivalent sind geliefert.

Um zu zeigen, dass $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ nicht äquivalent sind, reicht es, eine Intepretation zu finden, in der einer der beiden Sätze wahr ist, der andere aber falsch.

32.3 Gültigkeit, Folge und Konsistenz

Um auf Gültigkeit, Folge und Konsistenz zu testen, brauchen wir normalerweise Intepretationen, welche die Wahrheitswerte von mehreren Sätzen bestimmen.

Betrachten Sie das folgende Argument der LEO:

$$\exists x(G(x) \to G(a)) \therefore \exists x\, G(x) \to G(a)$$

Um zu zeigen, dass dieses Argument ungültig ist, müssen wir die Prämisse wahr und die Schlussfolgerung falsch machen. Die Schlussfolgerung ist ein Konditional. Um sie falsch zu machen, muss daher ihr Antezedens wahr und ihr Konsequens falsch sein. Unsere Domäne muss hierzu zumindest zwei Objekte beinhalten. Lasst es uns mit folgender Interpretation versuchen:

Domäne: Karl Marx, Ludwig von Mises
$G(x)$: $\_\_\_\_\__x$ hasste den Kommunismus
a: Karl Marx

Da Marx *das kommunistische Manifest* schrieb, ist '$G(a)$' in dieser Interpretation klar falsch. Aber von Mises hasste den Kommunismus. Also ist '$\exists x\, G(x)$' in dieser Interpretation wahr. Daher ist '$\exists x\, G(x) \rightarrow G(a)$' falsch, wie benötigt.

Macht unsere Interpretation die Prämisse unseres Arguments wahr? Ja. '$G(a) \rightarrow G(a)$' ist wahr, ja sogar eine Tautologie. Aber damit ist '$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' wahr. Also ist in dieser Intepretation die Prämisse wahr und die Schlussfolgerung falsch: somit ist das Argument als Ganzes ungültig.

Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass '$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' nicht '$\exists x\, G(x) \rightarrow G(a)$' zur Folge hat: $\exists x(G(x) \rightarrow G(a)) \nvDash \exists x G(x) \rightarrow G(a)$. Damit haben wir gezeigt, dass '$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' und '$\neg(\exists x\, G(x) \rightarrow G(a))$' konsistent sind.

Nehmen wir ein zweites Beispiel her:

$$\forall x \exists y\, L(x,y) \therefore \exists y \forall x\, L(x,y)$$

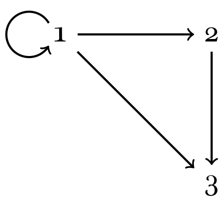
Auch hier wollen wir zeigen, dass das Argument ungültig ist. Wir machen hierzu die Prämisse wahr und die Schlussfolgerung falsch. Here ist eine Interpretation:

Domäne: Deutsche Bürger*innen, die derzeit in einer Partnerschaft mit genau einem/r anderen deutschen Bürger*in sind
$L(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ ist in einer Partnerschaft mit $\_\_\_\_\__y$

Dieser Interpretation nach ist die Prämisse klarerweise wahr. Alle in der Domäne sind in einer Partnerschaft mit einem/r anderen deutschen Bürger*in. Die andere Bürger*in ist dementsprechend ebenfalls in der Domäne. Für alle in der Domäne gibt es jemand (anders) in der Domäne, mit denen sie in einer Partnerschaft sind. Also ist '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' wahr. Allerdings ist die Schlussfolgerung klarerweise falsch, denn die Schlussfolgerung bedingt, dass es eine Person gibt, die in einer Partnerschaft mit allen in der Domäne ist. Aber so eine Person gibt es nicht. Das Argument ist also ungültig.

Nebenbei können wir auch hier direkt beobachten, dass die Sätze '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' und '$\neg \exists y \forall x\, L(x, y)$' konsistent sind und, dass $\forall x \exists y\, L(x, y) \nvDash \exists y \forall x\, L(x, y)$ gilt.

Für unser drittes Beispiel nutzen wir eine diagrammatische Interpretation:



Die Domäne dieser Interpretation sind die ersten drei natürlichen Zahlen und '$R(x, y)$' trifft auf x und y zu genau dann, wenn es einen Pfeil gibt, der von x zu y zeigt. Hier sind ein paar Sätze, die diese Interpretation wahr machen:

- '$\forall x \exists y\, R(y, x)$'
- '$\exists x \forall y\, R(x, y)$' Zeuge 1
- '$\exists x \forall y (R(y, x) \leftrightarrow x = y)$' Zeuge 1
- '$\exists x \exists y \exists z ((\neg y = z \land R(x, y)) \land R(z, x))$' Zeuge 2
- '$\exists x \forall y\, \neg R(x, y)$' Zeuge 3
- '$\exists x (\exists y\, R(y, x) \land \neg \exists y\, R(x, y))$' Zeuge 3

Das zeigt uns gleich, dass die obigen sechs Sätze konsistent sind. Wir können diese Beobachtung auch gleich nutzen, um ein paar *ungültige* Argumente zu generieren:

$$\forall x \exists y\, R(y, x), \exists x \forall y\, R(x, y) \therefore \forall x \exists y\, R(x, y)$$
$$\exists x \forall y\, R(x, y), \exists x \forall y \neg R(x, y) \therefore \neg \exists x \exists y \exists z (\neg y = z \land (R(x, y) \land R(z, x)))$$

Wenn eine Interpretation $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ wahr und $\mathscr{C}$ falsch macht, dann gilt:

- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ ist *ungültig*;
- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \nvDash \mathscr{C}$;
- und $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n, \neg\mathscr{C}$ sind konsistent.

Eine Interpretation, die eine Aussage (dass zwei Sätze konsistent sind, z.B.) widerlegt, nennen wir eine *Gegeninterpretation* oder ein *Gegenmodell*.

Wir beschließen dieses Kapitel mit einer Warnung. Die LEO hat bestimmte Einschränkungen: sie ist eine extensionale Sprache; sie ignoriert vage Eigenschaften; und sie kann Gültigkeit aufgrund "besonderer Gründe" nicht einfangen. Als ein Beispiel, nehmen wir dieses Argument her:

Alle Männer sind langweilig.
∴ Alle Junggesellen sind langweilig.

Dies ist ein gültiges Argument: es ist notwendigerweise wahr, dass alle Junggesellen Männer sind. Daher ist es unmöglich, dass die Prämisse wahr ist und die Schlussfolgerung falsch. Nun, könnten wir das Argument versuchen so zu symbolisieren:

$$\forall x(M(x) \to L(x)) \therefore \forall x(J(x) \to L(x))$$

Aber es ist einfach, Gegeninterpretationen zu finden, die zeigen, dass $\forall x(M(x) \to L(x)) \nvDash \forall x(J(x) \to L(x))$. Es wäre aber *falsch* daraus zu schließen, dass das deutsche Argument *ungültig* ist, nur weil es eine Gegeninterpretation zu seiner LEO-Symbolisierung gibt.

Übungen

A. Zeigen Sie, dass die folgenden Sätze weder Tautologien noch Widersprüche sind:

1. $D(a) \wedge D(b)$
2. $\exists x\, T(x, h)$
3. $P(m) \wedge \neg\forall x\, P(x)$
4. $\forall z\, J(z) \leftrightarrow \exists y\, J(y)$
5. $\forall x(W(x, m, n) \vee \exists y L(x, y))$
6. $\exists x(G(x) \rightarrow \forall y\, M(y))$
7. $\exists x(x = h \wedge x = i)$

B. Zeigen Sie, dass die folgenden Satzpaare nicht äquivalent sind:

1. $J(a)$, $K(a)$
2. $\exists x\, J(x)$, $J(m)$
3. $\forall x\, R(x, x)$, $\exists x\, R(x, x)$
4. $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(x)$, $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$, $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
6. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$
7. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
8. $\forall x \exists y\, R(x, y)$, $\exists x \forall y\, R(x, y)$
9. $\forall x \exists y\, R(x, y)$, $\forall x \exists y\, R(y, x)$

C. Zeigen Sie, dass die folgenden Sätze konsistent sind:

1. $M(a), \neg N(a), P(a), \neg Q(a)$
2. $L(e, e), L(e, g), \neg L(g, e), \neg L(g, g)$
3. $\neg(M(a) \wedge \exists x\, A(x)), M(a) \vee F(a), \forall x(F(x) \rightarrow A(x))$
4. $M(a) \vee M(b), M(a) \rightarrow \forall x \neg M(x)$
5. $\forall y\, G(y), \forall x(G(x) \rightarrow H(x)), \exists y \neg I(y)$
6. $\exists x(B(x) \vee A(x)), \forall x \neg C(x), \forall x\big[(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow C(x)\big]$
7. $\exists x\, X(x), \exists x\, Y(x), \forall x(X(x) \leftrightarrow \neg Y(x))$
8. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg(Q(x) \wedge P(x))$
9. $\exists z(N(z) \wedge O(z, z)), \forall x \forall y(O(x, y) \rightarrow O(y, x))$
10. $\neg\exists x \forall y\, R(x, y), \forall x \exists y\, R(x, y)$
11. $\neg R(a, a)$, $\forall x(x = a \vee R(x, a))$

12. $\forall x \forall y \forall z[(x = y \vee y = z) \vee x = z]$, $\exists x \exists y\ \neg x = y$
13. $\exists x \exists y((Z(x) \wedge Z(y)) \wedge x = y)$, $\neg Z(d)$, $d = e$

D. Zeigen Sie, dass die folgenden Argument ungültig sind:

1. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \therefore \exists x\, B(x)$
2. $\forall x(R(x) \rightarrow D(x)), \forall x(R(x) \rightarrow F(x)) \therefore \exists x(D(x) \wedge F(x))$
3. $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \therefore \exists x\, P(x)$
4. $N(a) \wedge N(b) \wedge N(c) \therefore \forall x\, N(x)$
5. $R(d, e), \exists x\, R(x, d) \therefore R(e, d)$
6. $\exists x(E(x) \wedge F(x)), \exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x) \therefore \exists x(E(x) \wedge G(x))$
7. $\forall x\, O(x, c), \forall x\, O(c, x) \therefore \forall x\, O(x, x)$
8. $\exists x(J(x) \wedge K(x)), \exists x \neg K(x), \exists x \neg J(x) \therefore \exists x(\neg J(x) \wedge \neg K(x))$
9. $L(a, b) \rightarrow \forall x\, L(x, b), \exists x\, L(x, b) \therefore L(b, b)$
10. $\forall x(D(x) \rightarrow \exists y\, T(y, x)) \therefore \exists y \exists z\ \neg y = z$

KAPITEL 33

Über alle Interpretationen nachdenken

33.1 Tautologien und Widersprüche

Wir können zeigen, dass ein Satz keine Tautologie ist, indem wir nur eine sorgfältig spezifizierte Interpretation liefern: eine Interpretation, in der der Satz falsch ist. Um zu zeigen, dass etwas eine Tautologie ist, reicht es aber nicht aus, zehn, hundert oder sogar tausend Interpretationen zu konstruieren, in denen der Satz wahr ist. Ein Satz ist nur dann eine Tautologie, wenn er in *jeder* Interpretation wahr ist. Aber es gibt unendlich viele Interpretationen. Wir müssen also über sie alle nachdenken. Doch das können wir nicht tun, indem wir uns einzeln mit ihnen befassen!

Manchmal können wir uns recht einfach mit allen Interpretationen befassen. Wir können beispielsweise ein recht einfaches Argument dafür liefern, dass '$R(a, a) \lor \neg R(a, a)$' eine Tautologie ist:

> Jede Interpretation gibt '$R(a, a)$' einen Wahrheitswert. Wenn '$R(a, a)$' in einer Interpretation wahr ist, dann ist '$R(a, a) \lor \neg R(a, a)$' in dieser Interpretation wahr. Wenn '$R(a, a)$' in einer Interpretation falsch ist, dann ist $\neg R(a, a)$ in dieser Interpretation wahr. Damit

> ist '$R(a, a) \vee \neg R(a, a)$' in dieser Interpretation wahr. Das sind die einzigen zwei Möglichkeiten. Also ist '$R(a, a) \vee \neg R(a, a)$' in jeder Interpretation wahr. Dementsprechend ist es eine Tautologie.

Dieses Argument ist gültig, aber es ist kein Argument der LEO. Stattdessen ist es ein Argument im Deutschen, unserer Metasprache, das *von* der LEO *handelt*.

Hier ist eine weitere Eigenschaft dieses Arguments. Weil der Satz, den wir betrachtet haben, keine Quantoren enthielt, mussten wir uns nicht überlegen, wie wir 'a' und 'R' interpretieren. Der Punkt war, dass, wie auch immer sie interpretiert werden, '$R(a, a)$' den gleichen Wahrheitswert hat.

Sehen wir uns ein weiteres Beispiel an. Der Satz '$\forall x(R(x, x) \vee \neg R(x, x))$' ist klarerweise eine Tautologie. Doch zu sagen, wieso das so ist stellt sich als schwierig heraus. Wir können nicht sagen, dass '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$' in jeder Interpretation wahr ist, da '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$' nicht einmal ein *Satz* der LEO ist ('x' ist eine Variable). Stattdessen sollten wir so was sagen:

> Betrachten Sie eine beliebige Interpretation. $\forall x(R(x, x) \vee \neg R(x, x))$ ist wahr in unserer Interpretation genau dann, wenn $R(x, x) \vee \neg R(x, x)$ von jedem Objekt in unserer Domäne erfüllt wird. Betrachten Sie nun ein beliebiges Element der Domäne, welches wir Fred nennen. Entweder erfüllt Fred $R(x, x)$ oder nicht. Wenn er '$R(x, x)$' erfüllt, dann erfüllt Fred auch '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$'. Wenn Fred '$R(x, x)$' nicht erfüllt, erfüllt er *dennoch* '$\neg R(x, x)$' und somit auch '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$'.[1] Wie auch immer, Fred erfüllt '$R(x, x) \vee \neg R(x, x)$'. Da Fred kein besonderes Element der Domäne war—wir hätten jedes Objekt wählen können—sehen wir, dass jedes Objekt

[1] Wir nutzen hier die Tatsache, dass die Wahrheitsbedingungen der Junktoren auch ihre Erfüllungsbedingungen wiederspiegeln: a erfüllt $\mathscr{A}(x) \vee \mathscr{B}(x)$ genau dann, wenn a $\mathscr{A}(x)$ erfüllt oder $\mathscr{B}(x)$ erfüllt, usw.

in der Domäne '$R(x,x) \vee \neg R(x,x)$' erfüllt. Also ist '$\forall x(R(x,x) \vee \neg R(x,x))$' in unserer Interpretation wahr. Aber wir hatten eine *beliebige* Interpretation gewählt. Daher ist '$\forall x(R(x,x) \vee \neg R(x,x))$' in jeder Interpretation wahr. Es ist also eine Tautologie.

Das alles ist recht langwierig; aber es gibt keine Alternative. Um zu zeigen, dass ein Satz eine Tautologie ist, müssen wir über *alle* Interpretationen nachdenken.

33.2 Andere Fälle

Ähnliches gilt auch für andere Fälle. Wir müssen über *alle* Interpretationen nachdenken, wenn wir zeigen wollen, dass:

- ein Satz ein Widerspruch ist, denn dies setzt voraus, dass der Satz in *jeder* Interpretation falsch ist
- zwei Sätze äquivalent sind, denn dies setzt voraus, dass sie in *allen* Interpretationen den gleichen Wahrheitswert haben
- einige Sätze inkonsistent sind, denn dies setzt voraus, dass es keine Interpretation gibt, in der sie alle wahr sind, d.h., dass in *jeder* Interpretation zumindest einer dieser Sätze falsch ist
- ein Argument gültig ist, denn dies setzt voraus, dass die Schlussfolgerung in *allen* Interpretationen wahr ist, in denen die Prämissen wahr sind
- einige Sätze einen anderen Satz zur Folge haben.

Das Problem ist, dass wir mit den bisher vorhandenen Werkzeugen nur schwerlich über alle Interpretationen nachdenken können. Ein letztes Beispiel ist diese Folgebeziehung:

$$\forall x(H(x) \wedge J(x)) \vDash \forall x\, H(x)$$

Wenn alle Dinge sowohl H als auch J sind, dann ist alles H. Diese Aussage ist also klarerweise wahr. Aber wir können das nur zeigen, indem wir uns ansehen, was in jeder Interpretation, die

die Prämisse wahr macht, vor sich geht. Um das zu tun, müssten wir wie folgt argumentieren:

> Betrachten Sie eine beliebige Interpretation in der '$\forall x(H(x) \wedge J(x))$' wahr ist. Es folgt, dass '$H(x) \wedge J(x)$' von allen Objekten dieser Interpretation erfüllt wird. Das aber heißt, dass '$H(x)$' ebenso von allen Objekten erfüllt wird.[2] Also ist '$\forall x\, H(x)$' in dieser Interpretation wahr. Wir haben nichts über diese Interpretation angenommen, außer, dass sie '$\forall x(H(x) \wedge J(x))$' wahr macht. Also ist jede Interpretation, die '$\forall x(H(x) \wedge J(x))$' wahr macht, eine Interpretation, die auch '$\forall x\, H(x)$' wahr macht.

Selbst für eine einfache Folge wie in unserem Beispiel ist unsere Argumentation recht langwierig. Für kompliziertere Folgen wird die Argumentation entsprechend langwieriger.

Die folgende Tabelle fasst zusammen, ob eine einzelne Interpretation oder Gegeninterpretation ausreicht, oder, ob wir über alle Interpretation nachdenken müssen.

	Yes	**No**
Tautologie?	alle Interpretationen	eine Gegeninterpretation
Widerspruch?	alle Interpretation	eine Gegeninterpretation
äquivalent?	alle Interpretationen	eine Gegeninterpretation
konsistent?	eine interpretation	alle Interpretationen
gültig?	alle Interpretationen	eine Gegeninterpretation
Folge?	alle Interpretationen	eine Gegeninterpretation

Es ist vielleicht hilfreich, diese Tabelle mit der in §14 zu vergleichen. Der wichtige Unterschied ist, dass die LEO sich mit Interpretationen befasst, während die WFL sich mit Bewertungen befasst. Dieser Unterschied ist wichtig, weil jede Wahrheitstabelle nur endlich viele Zeilen hat, womit eine komplette Wahrheitstabelle ein relativ fügsames Objekt ist. Im Gegensatz dazu gibt es

[2] Hier nutzen wir wieder die Tatsache, dass jedes Objekt welches $\mathscr{A}(x) \wedge \mathscr{B}(x)$ erfüllt, sowohl $\mathscr{A}(x)$ als auch $\mathscr{B}(x)$ erfüllt.

unendlich viele Interpretationen für alle Sätze, was das Nachdenken über alle Interpretationen schwieriger macht.

TEIL VII

Natürliche Herleitung für die LEO

KAPITEL 34

Grundregeln für die LEO

Die LEO nutzt alle Junktoren der WFL. Daher werden Beweise in der LEO alle Grund- und abgeleiteten Regeln der WFL nutzen (siehe Teil IV). Ebenso werden wir die beweistheoretischen Begriffe, die wir dort eingeführt hatten auch weiterhin nutzen (insbesondere '$\vdash$'). Allerdings brauchen wir auch neue Grundregeln für die Quantoren und das Identitätssymbol.

34.1 Universaleliminierung

Aus der Behauptung, dass alles F ist, können Sie herleiten, dass ein bestimmtes Objekt F ist. Was auch immer sonst es ist, es ist F. Das Folgende ist also in Ordnung:

1	$\forall x\, R(x, x, d)$	
2	$R(a, a, d)$	$\forall$E 1

Wir erhielten hier Zeile 2, indem wir den Universalquantor wegließen und jede Vorkommnis von 'x' durch 'a' ersetzten. Gleichermaßen ist folgendes erlaubt:

1	$\forall x\, R(x, x, d)$	
2	$R(d, d, d)$	$\forall$E 1

Hier erhielten wir Zeile 2, indem wir den Universalquantor wegließen und jede Vorkommnis von ‘x’ mit ‘d’ ersetzten. Wir hätten das gleiche auch mit jedem anderen Namen tun können.

Diesen Herleitungen entspricht die Universaleliminationsregel (∀E):

m	$\forall \mathscr{x}\, \mathscr{A}(\ldots \mathscr{x} \ldots \mathscr{x} \ldots)$	
	$\mathscr{A}(\ldots \mathscr{c} \ldots \mathscr{c} \ldots)$	∀E m

Die Notation hier haben wir schon in §30 eingeführt. Der Punkt ist, dass Sie jede *Substitutionsinstanz* einer universalquantifizierten Formel erhalten können: ersetzen Sie einfach jede Vorkommnis der gebundenen Variable mit einem Namen.

Zu betonen ist, dass Sie (wie bei jeder Eliminationsregel) die ∀E-Regel nur dann anwenden können, wenn der Universalquantor der Hauptoperator eines Satzes ist. Daher ist das Folgende *verboten*:

1	$\forall x\, B(x) \rightarrow B(k)$	
2	$B(b) \rightarrow B(k)$	inkorrekte Anwendung von ∀E 1

Dies ist unzulässig, da ‘$\forall x$’ nicht der Hauptoperator in Zeile 1 ist (wenn Sie nachvollziehen wollen, warum diese Art von Schlussfolgerung verboten ist, blättern Sie zurück zu §23).

34.2 Existenzeinführung

Aus der Behauptung, dass ein bestimmtes Objekt F ist, können Sie herleiten, dass etwas F ist. Also ist das folgende zulässig:

1	$R(a, a, d)$	
2	$\exists x\, R(a, a, x)$	∃I 1

Hier haben wir den Namen 'd' durch eine Variable 'x' ersetzt und diese dann mit einem Existenzquantor gebunden. Gleichermaßen ist erlaubt:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & R(a, a, d) & \\ \hline 2 & \exists x\, R(x, x, d) & \exists\text{I } 1 \end{array}$$

Hier haben wir beide Vorkommnisse des Namens 'a' durch eine Variable ersetzt und diese Variable dann mit einem Existenzquantor gebunden. Aber wir brauchen nicht beide Vorkommnisse eines Namens durch eine Variable zu ersetzen: Wenn Narziss sich selbst liebt, dann gibt es jemanden, der Narziss liebt. Also lassen wir auch das Folgende zu:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & R(a, a, d) & \\ \hline 2 & \exists x\, R(x, a, d) & \exists\text{I } 1 \end{array}$$

Hier haben wir *ein und nur ein* Vorkommnis des Namens 'a' durch eine Variable ersetzt und diese Variable dann mit einem Existenzquantor gebunden.

Diese Beobachtungen motivieren unsere Einführungsregel, obwohl wir zu ihrer Erläuterung eine neue Notation einführen müssen. Wo $\mathscr{A}$ ein Satz ist, der einen Namen c beinhaltet, können wir dies betonen, indem wir '$\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$' schreiben. Wir schreiben dann '$\mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots)$', um eine beliebige Formel anzuzeigen, die wir erhalten haben, indem wir *ein oder mehr* Vorkommnisse des Namens c mit der Variable x ersetzt haben. Diese Notation erlaubt uns, die Existenzeinführungsregel zu formulieren:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\ & \exists x\, \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) & \exists\text{I } m \end{array}$$

x darf nicht in $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ vorkommen.

Die angeführte Einschränkung garantiert, dass jede Anwendung der Regel einen Satz der LEO ausspuckt. Daher ist das Folgende erlaubt:

1	$R(a, a, d)$	
2	$\exists x\, R(x, a, d)$	$\exists$I 1
3	$\exists y \exists x\, R(x, y, d)$	$\exists$I 2

Aber das hier verboten:

1	$R(a, a, d)$	
2	$\exists x\, R(x, a, d)$	$\exists$I 1
3	$\exists x\, \exists x\, R(x, x, d)$	inkorrekte Anwendung von $\exists$I 2

da der Ausdruck in Zeile 3 widerstreitende Variablen enthält (welcher Existenzquantor bindet welches Vorkommnis von 'x'?) und somit kein Satz der LEO ist.

34.3 Leere Domänen

Der folgende Beweis kombiniert unsere zwei neuen Regeln:

1	$\forall x\, F(x)$	
2	$F(a)$	$\forall$E 1
3	$\exists x\, F(x)$	$\exists$I 2

Könnte dies ein schlechter Beweis sein? Wenn überhaupt etwas existiert, dann können wir sicherlich aus der Tatsache, dass alles F ist, herleiten, dass etwas F ist. Aber was ist, wenn überhaupt *nichts* existiert? Dann ist wahr, dass alles F ist; daraus folgt jedoch nicht, dass etwas F ist, denn es gibt nichts das F sein könnte. Wenn wir also behaupten, dass '$\exists x\, F(x)$' aus '$\forall x\, F(x)$' folgt, dann behaupten wir, dass die Logik garantiert, dass es etwas gibt. Ist das akzeptabel?

Tatsächlich haben wir uns bereits darauf festgelegt. In §22 haben wir gesagt, dass Domänen der LEO mindestens ein Element haben müssen. Dann definierten wir eine Tautologie als einen Satz, der in jeder Interpretation wahr ist. Da nun '$\exists x\, x = x$' in jeder Interpretation wahr ist, hat unsere Bestimmung zur Folge, dass die Logik garantiert, dass es etwas gibt.

Da es nicht ohne weiteres klar ist, dass die Logik dies garantieren *soll*, könnten wir versuchen, unsere Festlegung zu umgehen. Dieses Manöver ist allerdings kostspielig. Hier sind drei Dinge, die wir sagen wollen:

- $\forall x\, F(x) \vdash F(a)$: $\forall$E.
- $F(a) \vdash \exists x\, F(x)$: $\exists$I.
- die Fähigkeit, Beweise durch Copy-and-Paste zu erhalten: Schließlich argumentieren wir, indem wir viele kleine Schritte zu großen Beweisen zusammenfügen.

Um all diese Dinge zu sagen, müssen wir auch $\forall x\, F(x) \vdash \exists x\, F(x)$ sagen. Wenn die Logik nicht die Existenz einiger Dinge garantieren soll, dann müssen wir also eine der drei obigen Aussagen aufgeben.

Bevor wir anfangen, darüber nachzudenken, welche wir aufgeben wollen, sollten wir uns fragen, ob wir nicht doch sagen sollen, dass die Logik garantiert, dass etwas existiert. Zugegeben, ontologische Debatten darüber, warum es etwas statt nichts gibt, werden dadurch nicht gerade interessanter. Aber normalerweise hat unsere Annahme keine negativen Konsequenzen. Vielleicht sollten wir also einfach unser Herleitungssystem (und die LEO, allgemeiner gesagt) als ein System betrachten, dessen Anwendungsbereich etwas eingeschränkt ist. Wenn wir jemals die Möglichkeit des Nichtsseins zulassen wollen, dann brauchen wir ein komplizierteres Herleitungssystem. Aber solange wir uns damit zufrieden geben, diese Möglichkeit zu ignorieren, ist unser Herleitungssystem in Ordnung. (Genauso wie die Vorschrift, dass jede Domäne mindestens ein Objekt enthalten muss).

34.4 Universaleinführung

Nehmen Sie an, Sie haben zu jedem einzelnen Objekt gezeigt, dass es F ist (und dass es keine anderen Dinge zu berücksichtigen gibt). Dann könnten Sie zu Recht behaupten, dass alles F ist. Das motiviert die folgende Beweisregel. Wenn Sie jede einzelne Substitutionsinstanz von '$\forall x\, F(x)$' nachgewiesen haben, dann können Sie '$\forall x\, F(x)$' herleiten.

Leider wäre diese Regel völlig unbrauchbar. Um jede einzelne Substitutionsinstanz zu beweisen, müssten Sie '$F(a)$', '$F(b)$', ..., '$F(j_2)$', ..., '$F(r_{79002})$', ... herleiten. Da es in der LEO prinzipiell unendlich viele Namen gibt, würde dieser Prozess kein Ende finden. Wir können die eben motivierte Regel also niemals anwenden. Wir müssen bei der Aufstellung unserer Regel zur Einführung eines Universalquantors etwas geschickter vorgehen.

Eine Lösung wird durch Fälle wie:

$$\forall x\, F(x) \therefore \forall y\, F(y)$$

inspiriert. Dieses Argument ist *klarerweise* gültig. Schließlich ist die alphabetische Variation eine Frage des Geschmacks und hat keine logischen Konsequenzen. Aber wie könnte unser Beweissystem dies widerspiegeln? Nehmen wir an, wir beginnen einen Beweis so:

1	$\forall x\, F(x)$	
2	$F(a)$	$\forall$E 1

Wir haben '$F(a)$' bewiesen. Und nichts hindert uns daran, dieselbe Rechtfertigung auch für '$F(b)$', '$F(c)$', ..., '$F(j_2)$', ..., '$F(r_{79002})$, ... zu geben (bis unser Leben endet). Und so sehen wir ein, dass wir F-c, für jeden Namen -c beweisen können. Aber wenn wir das für *jedes* Ding tun können, können wir doch sicherlich sagen, dass 'F' auf *alles* zutrifft. Dies rechtfertigt den Schluss auf '$\forall y\, F(y)$' wie folgt:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x\, F(x) & \\
\cline{2-2}
2 & F(a) & \forall\text{E } 1 \\
3 & \forall y\, F(y) & \forall\text{I } 2
\end{array}
$$

Der wichtige Punkt hier ist, dass 'a' nur ein *beliebiger* Name war. Es war nichts Besonderes an diesem Namen–wir hätten jeden anderen Namen wählen können–und trotzdem wäre der Beweis korrekt gewesen. Dieser Punkt motiviert die Universaleinführungsregel ($\forall$I):

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\
 & \forall \chi\, \mathscr{A}(\ldots \chi \ldots \chi \ldots) & \forall\text{I } m
\end{array}
$$

c darf in keiner ungetilgten Annahme vorkommen
χ darf nicht in $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ vorkommen

Ein entscheidender Aspekt dieser Regel ist in der ersten Einschränkung niedergeschrieben. Diese Einschränkung stellt sicher, dass wir immer auf einer ausreichend allgemeinen Ebene argumentieren.

Um zu sehen, wie diese Einschränkung dies garantiert, betrachten Sie:

> Jeder liebt Kylie Minogue; deshalb liebt jeder sich selbst.

Wir könnten dieses klar ungültige Argument so symbolisieren:

$$\forall x\, L(x, k) \therefore \forall x\, L(x, x)$$

Versuchen wir nun, einen Beweis für dieses Argument zu geben:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x\, L(x, k) & \\
\cline{2-2}
2 & L(k, k) & \forall\text{E } 1 \\
3 & \forall x\, L(x, x) & \text{inkorrekte Anwendung von } \forall\text{I } 2
\end{array}
$$

Dies ist nicht erlaubt, weil 'k' bereits in einer ungetilgten Annahme, nämlich in Zeile 1, vorkommt. Der entscheidende Punkt ist, dass wir, wenn wir irgendwelche Annahmen über das Objekt, mit dem wir arbeiten, gemacht haben, nicht allgemein genug argumentieren, um ∀I zu verwenden.

Obwohl der Name in keiner *ungetilgten* Annahme vorkommen darf, darf er in einer *getilgten* Annahme vorkommen. D.h. er darf in einem bereits geschlossenen Unterbeweis vorkommen. Das folgende Beispiel ist zulässig:

1	$\quad G(d)$	
2	$\quad G(d)$	R 1
3	$G(d) \to G(d)$	→I 1–2
4	$\forall z(G(z) \to G(z))$	∀I 3

Dieser Beweis zeigt, dass '$\forall z(G(z) \to G(z))$' ein *Theorem* ist.

Lasst uns den letzten Punkt noch weiter betonen. Den Konventionen §30.3s nach bedingt die Verwendung von ∀I, dass wir *jede* Vorkommnis des Namens c in $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ mit der Variable x ersetzen. Wenn wir nur *einige* Namen ersetzen und andere nicht, dann "beweisen" wir einige blöde Aussagen. Zum Beispiel:

> Jeder ist so alt wie er selbst; also ist jeder so alt wie Judi Dench.

Wir können dieses Argument so symbolisieren:

$$\forall x\, A(x, x) \therefore \forall x\, A(x, d)$$

Versuchen wir nun einen Beweis zu konstruieren, der diesem blöden Argument entspricht:

1	$\forall x\, A(x, x)$	
2	$A(d, d)$	∀E 1
3	$\forall x\, A(x, d)$	inkorrekte Anwendung von ∀I 2

Glücklicherweise lassen unsere Regeln solche Beweise nicht zu: der versuchte Beweis ist unzulässig, da er nicht *jede* Vorkommnis von ‘d’ in Zeile 2 mit ‘x’ ersetzt.

34.5 Existenzeliminierung

Nehmen Sie an, Sie wissen, dass *etwas* F ist. Nur so viel zu wissen, erlaubt uns nicht zu wissen, welches Ding F ist. Daher können wir von ‘$\exists x\, F(x)$’ nicht direkt auf ‘$F(a)$’, ‘$F(e_{23})$’ oder irgendeine andere Substitutionsinstanz schließen. Können wir sonst was machen?

Nehmen Sie an, Sie wissen, dass etwas F ist und, dass alle Fs G sind. Nun könnten wir wie folgt argumentieren:

> Da etwas F ist, gibt es ein bestimmtes Ding, das ein F ist. Wir wissen nichts über dieses Ding, außer dass es ein F ist, aber der Einfachheit halber nennen wir es ‘Becky’. Also: Becky ist F. Da alles, was F ist, G ist, folgt daraus, dass Becky G ist. Da aber Becky G ist, folgt daraus, dass etwas G ist. Und nichts hing davon ab, welches Objekt genau Becky war. Etwas ist also G.

Diese Argumentation können wir so in unserem Herleitungssystem einfangen:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \exists x\, F(x) & \\
2 & \forall x(F(x) \to G(x)) & \\
\hline
3 & \quad \mid\; F(b) & \\
4 & \quad \mid\; F(b) \to G(b) & \forall\mathrm{E}\ 2 \\
5 & \quad \mid\; G(b) & \to\!\mathrm{E}\ 4,\ 3 \\
6 & \quad \mid\; \exists x\, G(x) & \exists\mathrm{I}\ 5 \\
7 & \exists x\, G(x) & \exists\mathrm{E}\ 1,\ 3\text{–}6
\end{array}
$$

Brechen wir dies herunter: Wir begannen mit unseren Annahmen. In Zeile 3 führten wir dann eine weitere Annahme ein: '$F(b)$'. Das war einfach eine Substitutionsinstanz von '$\exists x\, F(x)$'. Mittels dieser Annahme zeigten wir, dass '$\exists x\, G(x)$'. Zu beachten ist, dass wir keine *besonderen* Annahmen über das Objekt, das wir 'b' nennen, gemacht haben. Wir nahmen *nur* an, dass es '$F(x)$' erfüllt. Daher hängt nichts davon ab, welches Objekt es genau ist. Und Zeile 1 sagt uns, dass *etwas* '$F(x)$' erfüllt, also war unsere Argumentation verallgemeinerbar. Wir können die spezifische Annahme '$F(b)$' tilgen und auf '$\exists x\, G(x)$' schließen.

Hier ist nun die Existenzeliminierungsregel ($\exists$E):

m	$\exists x\, \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$	
i	$\quad \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$	
j	$\quad \mathscr{B}$	
	$\mathscr{B}$	$\exists$E m, i–j

c darf in keiner Annahme vorkommen, die vor Zeile i ungetilgt ist
c darf nicht in $\exists x\, \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ vorkommen
c darf nicht in $\mathscr{B}$ vorkommen

Wie bei der Universaleinführung sind die Einschränkungen äußerst wichtig. Um zu sehen, warum, betrachten Sie das folgende schreckliche Argument:

> Tim Button ist ein Dozent. Jemand ist kein Dozent.
> Also ist Tim Button sowohl Dozent als auch nicht.

Dieses ungültige Argument können wir wie folgt symbolisieren:

$$D(b), \exists x \neg D(x) \therefore D(b) \wedge \neg D(b)$$

Versuchen wir nun einen Beweis für dieses Argument zu konstruieren:

1	$D(b)$	
2	$\exists x\, \neg D(x)$	
3	$\quad \neg D(b)$	
4	$\quad D(b) \land \neg D(b)$	$\land$I 1, 3
5	$D(b) \land \neg D(b)$	inkorrekte Anwendung von $\exists$E 2, 3–4

Die letzte Zeile dieses Beweises ist unzulässig. Der Name, den wir in unserer Substitutionsinstanz für '$\exists x\, \neg D(x)$' in Zeile 3 nutzten, 'b', kommt in Zeile 4 vor. Auch das hier ist schlecht:

1	$D(b)$	
2	$\exists x\, \neg D(x)$	
3	$\quad \neg D(b)$	
4	$\quad D(b) \land \neg D(b)$	$\land$I 1, 3
5	$\quad \exists x(D(x) \land \neg D(x))$	$\exists$I 4
6	$\exists x(D(x) \land \neg D(x))$	inkorrekte Anwendung von $\exists$E 2, 3–5

Die letzte Zeile ist immer noch unzulässig. Denn der Name, den wir in unserer Substitutionsinstanz für '$\exists x\, \neg L(x)$' nutzten, 'b', kommt in einer ungetilgten Annahme vor: Zeile 1.

Die Moral ist: *Wenn Sie Informationen aus einem Existenzquantor herausquetschen wollen, wählen Sie einen neuen Namen für Ihre Substitutionsinstanz.* Auf diese Weise garantieren Sie, dass Sie alle Einschränkungen der Regel $\exists$E erfüllen.

Übungen

A. Erklären Sie, wieso die folgenden Beweise *inkorrekt* sind. Geben Sie auch Interpretationen an, die zeigen, dass die den Beweisen zugrundeliegenden Argumente ungültig sind:

1	$\forall x\, R(x, x)$	
2	$R(a, a)$	$\forall$E 1
3	$\forall y\, R(a, y)$	$\forall$I 2
4	$\forall x\, \forall y\, R(x, y)$	$\forall$I 3

1	$\forall x\, \exists y\, R(x, y)$	
2	$\exists y\, R(a, y)$	$\forall$E 1
3	$\quad R(a, a)$	
4	$\quad \exists x\, R(x, x)$	$\exists$I 3
5	$\exists x\, R(x, x)$	$\exists$E 2, 3–4

B. Den folgenden drei Beweisen fehlen Zitationen (Regeln und Zeilennummern). Fügen Sie diese hinzu.

1.

1	$\forall x \exists y(R(x, y) \lor R(y, x))$
2	$\forall x\, \neg R(m, x)$
3	$\exists y(R(m, y) \lor R(y, m))$
4	$\quad R(m, a) \lor R(a, m)$
5	$\quad \neg R(m, a)$
6	$\quad R(a, m)$
7	$\quad \exists x\, R(x, m)$
8	$\exists x\, R(x, m)$

	1	$\forall x(\exists y\, L(x,y) \to \forall z\, L(z,x))$
	2	$L(a,b)$
	3	$\exists y\, L(a,y) \to \forall z L(z,a)$
	4	$\exists y\, L(a,y)$
	5	$\forall z\, L(z,a)$
2.	6	$L(c,a)$
	7	$\exists y\, L(c,y) \to \forall z\, L(z,c)$
	8	$\exists y\, L(c,y)$
	9	$\forall z\, L(z,c)$
	10	$L(c,c)$
	11	$\forall x\, L(x,x)$

	1	$\forall x(J(x) \to K(x))$	
	2	$\exists x\, \forall y\, L(x,y)$	
	3	$\forall x\, J(x)$	
	4		$\forall y\, L(a,y)$
	5		$L(a,a)$
3.	6		$J(a)$
	7		$J(a) \to K(a)$
	8		$K(a)$
	9		$K(a) \wedge L(a,a)$
	10		$\exists x(K(x) \wedge L(x,x))$
	11	$\exists x(K(x) \wedge L(x,x))$	

C. In §23 Übung A, betrachteten wir 15 syllogistische Figuren.

Geben Sie Beweise, die diesen Argumentformen entsprechen. Beachten Sie: Die Übung ist *viel* leichter, wenn Sie ‘Kein F ist G’ (beispielsweise) als ‘$\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$’ symbolisieren.

D. Aristoteles und seine Nachfolger*innen identifizierten weitere syllogistische Formen. Symbolisieren Sie diese in der LEO und geben Sie dementsprechende Beweise.

1. **Barbari**. Etwas ist H. Alle Gs sind F. Alle Hs sind G. Also: Ein H ist F
2. **Celaront**. Etwas ist H. Kein G ist F. Alle Hs sind G. Also: Ein H ist nicht F
3. **Cesaro**. Etwas ist H. Kein F ist G. Alle Hs sind G. Also: Ein H ist nicht F.
4. **Camestros**. Etwas ist H. Alle Fs sind G. Kein H ist G. Also: Ein H ist nicht F.
5. **Felapton**. Etwas ist G. Kein G ist F. Alle Gs sind H. Also: Ein H ist nicht F.
6. **Darapti**. Etwas ist G. Alle Gs sind F. Alle Gs sind H. Also: Ein H ist F.
7. **Calemos**. Etwas ist H. Alle Fs sind G. Kein G ist H. Also: Ein H ist nicht F.
8. **Fesapo**. Etwas ist G. Kein F ist G. All Gs sind H. Also: Ein H ist nicht F.
9. **Bamalip**. Etwas ist F. Alle Fs sind G. Alle Gs sind H. Also: Ein H ist F.

E. Beweisen Sie jede der folgenden Aussagen.

1. $\vdash \forall x\, F(x) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge F(y))$
2. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x\, A(x) \vdash \exists x\, B(x)$
3. $\forall x(M(x) \leftrightarrow N(x)), M(a) \wedge \exists x\, R(x, a) \vdash \exists x\, N(x)$
4. $\forall x\, \forall y\, G(x, y) \vdash \exists x\, G(x, x)$
5. $\vdash \forall x\, R(x, x) \rightarrow \exists x\, \exists y\, R(x, y)$
6. $\vdash \forall y\, \exists x(Q(y) \rightarrow Q(x))$
7. $N(a) \rightarrow \forall x(M(x) \leftrightarrow M(a)), M(a), \neg M(b) \vdash \neg N(a)$
8. $\forall x\, \forall y(G(x, y) \rightarrow G(y, x)) \vdash \forall x \forall y(G(x, y) \leftrightarrow G(y, x))$

9. $\forall x(\neg M(x) \vee L(j,x)), \forall x(B(x) \rightarrow L(j,x)), \forall x(M(x) \vee B(x)) \vdash \forall x L(j,x)$

F. Geben Sie einen Symbolisierungsschlüssel für das folgende Argument, symbolisieren Sie es und geben Sie einen dementsprechenden Beweis:

> Es gibt jemanden, der jeden mag, der jeden mag, den er mag. Es gibt also jemanden, der sich selbst mag.

G. Zeigen Sie, dass die folgenden Satzpaare beweisbar äquivalent sind.

1. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x)),\ \neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$
2. $\forall x(\neg A(x) \rightarrow B(d)),\ \forall x\, A(x) \vee B(d)$
3. $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(c),\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(c))$

H. Für jedes der folgenden Satzpaare: Wenn sie beweisbar äquivalent sind, legen Sie Beweise vor, um dies zu belegen. Wenn sie nicht äquivalent sind, konstruieren Sie eine Interpretation, um zu zeigen, dass sie es nicht sind.

1. $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(c), \forall x(P(x) \rightarrow Q(c))$
2. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, B(x,y,z), \forall x\, B(x,x)x$
3. $\forall x\, \forall y\, D(x,y), \forall y\, \forall x\, D(x,y)$
4. $\exists x\, \forall y\, D(x,y), \forall y\, \exists x\, D(x,y)$
5. $\forall x(R(c,a) \leftrightarrow R(x,a)), R(c,a) \leftrightarrow \forall x\, R(x,a)$

I. Für jedes der folgenden Argumente: Wenn es in der LEO gültig ist, geben Sie einen Beweis. Wenn es ungültig ist, konstruieren Sie eine Interpretation, um zu zeigen, dass es ungültig ist.

1. $\exists y\, \forall x\, R(x,y)\ \therefore\ \forall x\, \exists y\, R(x,y)$
2. $\forall x\, \exists y\, R(x,y)\ \therefore\ \exists y\, \forall x\, R(x,y)$
3. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\ \therefore\ \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
4. $\forall x(S(x) \rightarrow T(a)), S(d)\ \therefore\ T(a)$
5. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \forall x(B(x) \rightarrow C(x))\ \therefore\ \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$
6. $\exists x(D(x) \vee E(x)), \forall x(D(x) \rightarrow F(x))\ \therefore\ \exists x(D(x) \wedge F(x))$
7. $\forall x\, \forall y(R(x,y) \vee R(y,x))\ \therefore\ R(j,j)$

8. $\exists x\, \exists y(R(x,y) \lor R(y,x)) \therefore R(j,j)$
9. $\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x), \exists x\, \neg P(x) \therefore \exists x\, \neg Q(x)$
10. $\exists x\, M(x) \to \exists x\, N(x), \neg\exists x\, N(x) \therefore \forall x\, \neg M(x)$

KAPITEL 35

Beweise mit Quantoren

In §17 diskutierten wir Strategien für Beweise, die die Grundregeln der WFL nutzen. Die gleichen Prinzipien gelten auch für die Regeln der Quantoren.

Wenn wir $\forall x\, \mathscr{A}(x)$ oder $\exists x\, \mathscr{A}(x)$ herleiten wollen, können wir rückwärts arbeiten, indem wir den relevanten Satz mit ∀I oder ∃I rechtfertigen und dann versuchen, die Prämisse der Regel herzuleiten. Wenn wir hingegen von Sätzen mit Quantoren vorwärts arbeiten wollen, dann wenden wir ∀E oder ∃E an.

Nehmen Sie an, wir wollen $\forall x\, \mathscr{A}(x)$ herleiten. Um das mittels ∀I zu tun, müssten wir $\mathscr{A}(c)$ für einen Namen c, der in keiner ungetilgten Annahme vorkommt, herleiten. Von $\forall x\, \mathscr{A}(x)$ rückwärts arbeitend schreiben wir also $\mathscr{A}(c)$ darüber auf und versuchen dann, diesen Satz herzuleiten.

	$\vdots$	
n	$\mathscr{A}(c)$	
$n+1$	$\forall x\, \mathscr{A}(x)$	∀I n

$\mathscr{A}(c)$ erhalten wir von $\mathscr{A}(x)$, indem wir jedes ungebundene Vorkommnis von x in $\mathscr{A}(x)$ mit c ersetzen. Damit das funktioniert, muss c eine Einschränkung erfüllen. Wir garantieren, dass es das tut, indem wir immer einen Namen auswählen, der noch nicht im bis dato konstruierten Beweis vorkommt.

Um von $\exists x\, \mathscr{A}(x)$ aus rückwärts zu arbeiten, schreiben wir ähnlicherweise einen Satz darüber auf, der uns als Rechtfertigung für eine Anwendung der ∃I-Regel dienen kann: einen Satz der Form $\mathscr{A}(c)$.

$$\begin{array}{l|ll}
 & \vdots & \\
n & \mathscr{A}(c) & \\
n+1 & \exists x\, \mathscr{A}(x) & \exists\mathrm{I}\ n
\end{array}$$

Das sieht genauso aus, als ob wir von einem Satz mit Universalquantor rückwärts arbeiten. Der Unterschied ist aber, dass wir für ∀I einen Namen c auswählen müssen, der bis dato noch nicht im Beweis vorkam, während wir für ∃I einen Namen c auswählen müssen, der bereits im Beweis vorkommt. Genau wie im Fall von ∨I ist oft nicht sofort klar, welcher Name c letztendlich funktioniert. Daher sollten Sie nur von einem Existenzquantor rückwärts arbeiten, wenn Sie alle anderen Strategien bereits versucht haben.

Vorwärts vom Satz $\exists x\, \mathscr{A}(x())$ zu arbeiten funktioniert hingegen so gut wie immer. Um das zu tun, betrachten wir nicht nur $\exists x\, \mathscr{A}(x)$, sondern auch den Satz $\mathscr{B}$, den Sie beweisen wollen. Vorwärts arbeitend müssen Sie einen Unterbeweis über $\mathscr{B}$ aufschreiben, wo $\mathscr{B}$ die letzte Zeile ist, und eine Substitutionsinstanz $\mathscr{A}(c)$ von $\exists x\, \mathscr{A}(x)$ als Annahme fungiert. Um sicherzustellen, dass die Einschränkung von c, die im Falle von ∃E gilt, erfüllt ist, wählen Sie einen Namen c, der bis dato noch nicht in Ihrem Beweis vorkam.

$$\begin{array}{l|ll}
 & \vdots & \\
m & \exists x\, \mathscr{A}(x) & \\
 & \vdots & \\
n & \quad \mid\ \underline{\mathscr{A}(c)} & \\
 & \quad \mid\ \vdots & \\
k & \quad \mid\ \mathscr{B} & \\
k+1 & \mathscr{B} & \exists\mathrm{E}\ m,\ n\text{–}k
\end{array}$$

Sie fahren dann mit dem Ziel fort, $\mathscr{B}$ herzuleiten, aber nun innerhalb eines Unterbeweises, in welchem Sie einen weiteren Satz nutzen können ($\mathscr{A}(\mathscr{c})$).

Zuletzt: Vorwärts von $\forall \mathscr{x}\, \mathscr{A}(\mathscr{x})$ arbeiten heißt, dass sie $\mathscr{A}(\mathscr{c})$ (für irgendeinen Namen $\mathscr{c}$) aufschreiben und es mit $\forall$E rechtfertigen. Sie wollen das natürlich nicht einfach so tun. Nur bestimmte Namen $\mathscr{c}$ werden Ihnen dabei helfen, Ihren Zielsatz zu beweisen. So wie Sie also nur unter bestimmten Umständen von $\exists \mathscr{x}\, \mathscr{A}(\mathscr{x})$ rückwärts arbeiten sollten, sollten Sie auch nur von $\forall \mathscr{x}\, \mathscr{A}(\mathscr{x})$ vorwärts arbeiten, wenn Sie schon alle anderen Strategien angewandt haben.

Lasst uns $\forall x(A(x) \to B) \therefore \exists x\, A(x) \to B$ als Beispiel nehmen. Um unseren Beweis zu beginnen, schreiben wir die Prämisse oben und die Schlussfolgerung unten auf.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x(A(x) \to B) \\
\hline
 & \vdots \\
n & \exists x\, A(x) \to B
\end{array}
$$

Die Strategien für die Junktoren der WFL gelten nach wie vor und Sie sollten sie in der gleichen Reihenfolge anwenden: zuerst rückwärts arbeiten von Konditionalen, Negationen, Konjunktionen und jetzt auch Universalquantoren; dann vorwärts arbeiten von Disjunktionen und jetzt Existenzquantoren; erst dann versuchen Sie, $\to$E, $\neg$E, $\vee$I, $\forall$E oder $\exists$I anzuwenden. In unserem Fall bedeutet das, dass wir von der Schlussfolgerung aus rückwärts arbeiten:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & \forall x(A(x) \to B) & \\
\hline
2 & \quad \begin{array}{|l} \exists x\, A(x) \\ \hline \vdots \\ B \end{array} & \\
n-1 & & \\
n & \exists x\, A(x) \to B & \to\text{I } 2\text{–}(n-1)
\end{array}
$$

Unser nächster Schritt ist, dass wir von $\exists x\, A(x)$ in Zeile 2 vorwärts arbeiten. Dazu wählen wir einen Namen, der noch nicht in unserem Beweis vorkommt. Weil kein Name vorkommt, können wir irgendeinen wählen, z.B. 'd':

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \forall x(A(x) \to B) & \\
\hline
2 & \quad \mid\ \exists x\, A(x) & \\
3 & \quad \mid \quad \mid\ A(d) & \\
 & \quad \mid \quad \mid\ \vdots & \\
n-2 & \quad \mid \quad \mid\ B & \\
n-1 & \quad \mid\ B & \exists\text{E } 2,\ 3\text{–}(n-2) \\
n & \exists x\, A(x) \to B & \to\text{I } 2\text{–}(n-1)
\end{array}
$$

Nun haben wir unsere ersten Strategien erschöpft und wir arbeiten von $\forall x(A(x) \to B)$ aus vorwärts. $\forall$E zu nutzen heißt, dass wir jede Instanz von $A(c) \to B$ rechtfertigen können, egal welches c wir auswählen. Wir wählen hier natürlich d, denn das gibt uns $A(d) \to B$. Und dann können wir $\to$E anwenden um B rechtzufertigen, womit wir den Beweis beenden.

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \forall x(A(x) \to B) & \\
\hline
2 & \quad \mid\ \exists x\, A(x) & \\
3 & \quad \mid \quad \mid\ A(d) & \\
4 & \quad \mid \quad \mid\ A(d) \to B & \forall\text{E } 1 \\
5 & \quad \mid \quad \mid\ B & \to\text{E } 4,\ 3 \\
6 & \quad \mid\ B & \exists\text{E } 2,\ 3\text{–}5 \\
7 & \exists x\, A(x) \to B & \to\text{I } 2\text{–}6
\end{array}
$$

Lasst uns nun einen Beweis des Umkehrschlusses angeben. Wir beginnen mit

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \exists x\, A(x) \to B \\
\hline
 & \vdots \\
n & \forall x(A(x) \to B)
\end{array}
$$

Die Prämisse ist hier ein Konditional und kein Satz mit einem Existenzquantor. Also sollten wir nicht von ihr ausgehend vorwärts arbeiten. Von der Schlussfolgerung aus rückwärts arbeitend, versuchen wir $A(d) \to B$ herzuleiten:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \exists x\, A(x) \to B & \\
\hline
 & \vdots & \\
n-1 & A(d) \to B & \\
n & \forall x(A(x) \to B) & \forall\mathrm{I}\ n-1
\end{array}
$$

Und von $A(d) \to B$ aus rückwärts zu arbeiten, heißt, dass wir einen Unterbeweis mit $A(d)$ als Annahme und B als Schlusszeile brauchen:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \exists x\, A(x) \to B & \\
\hline
2 & \quad\vert\ \underline{A(d)} & \\
 & \quad\vert\ \vdots & \\
n-2 & \quad\vert\ B & \\
n-1 & A(d) \to B & \to\mathrm{I}\ 2\text{–}(n-2) \\
n & \forall x(A(x) \to B) & \forall\mathrm{I}\ n-1
\end{array}
$$

Nun können wir von der Prämisse in Zeile 1 aus vorwärts arbeiten. Die ist ein Konditional und sein Konsequens ist gerade der Satz B, den wir rechtfertigen wollen. Also brauchen wir eine Herleitung des Antezedens, $\exists x\, A(x)$. Diese Herleitung ist netterweise einfach erhältlich, indem wir $\exists$I auf Zeile 2 anwenden. Damit sind wir auch schon fertig:

1	$\exists x\, A(x) \to B$	
2	$\quad A(d)$	
3	$\quad \exists x\, A(x)$	$\exists$I 2
4	$\quad B$	$\to$E 1, 3
5	$A(d) \to B$	$\to$I 2–4
6	$\forall x(A(x) \to B)$	$\forall$I 5

Übungen

A. Verwenden Sie die obigen Strategien, um Beweise für jedes der folgenden Argumente und Theoreme zu finden:

1. $A \to \forall x\, B(x) \therefore \forall x(A \to B(x))$
2. $\exists x(A \to B(x)) \therefore A \to \exists x\, B(x)$
3. $\therefore \forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x))$
4. $\therefore \exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x))$
5. $A \vee \forall x\, B(x)) \therefore \forall x(A \vee B(x))$
6. $\forall x(A(x) \to B) \therefore \exists x\, A(x) \to B$
7. $\exists x(A(x) \to B) \therefore \forall x\, A(x) \to B$
8. $\therefore \forall x(A(x) \to \exists y\, A(y))$

Verwenden Sie zusätzlich zu den grundlegenden Quantorenregeln nur die Grundregeln der WFL.

B. Verwenden Sie die obigen Strategien, um Beweise für jedes der folgenden Argumente und Theoreme zu finden:

1. $\forall x\, R(x, x) \therefore \forall x\, \exists y\, R(x, y)$
2. $\forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)]$
   $\therefore \forall x\, \forall y[R(x, y) \to \forall z(R(y, z) \to R(x, z))]$
3. $\forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)]$,
   $\forall x\, \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$
   $\therefore \forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x, y) \wedge R(x, z)) \to R(y, z)]$

4. $\forall x\,\forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
   $\therefore \forall x\,\forall y\,\forall z[(R(x,y) \land R(x,z)) \rightarrow \exists u(R(y,u) \land R(z,u))]$
5. $\therefore \neg\exists x\,\forall y(A(x,y) \leftrightarrow \neg A(y,y))$

C. Verwenden Sie die obigen Strategien, um Beweise für jedes der folgenden Argumente und Theoreme zu finden:

1. $\forall x\, A(x) \rightarrow B \therefore \exists x(A(x) \rightarrow B)$
2. $A \rightarrow \exists x\, B(x) \therefore \exists x(A \rightarrow B(x))$
3. $\forall x(A \lor B(x)) \therefore A \lor \forall x\, B(x))$
4. $\therefore \exists x(A(x) \rightarrow \forall y\, A(y))$
5. $\therefore \exists x(\exists y\, A(y) \rightarrow A(x))$

Diese erfordern den Einsatz von IB. Verwenden Sie zusätzlich zu den grundlegenden Quantorenregeln nur die Grundregeln der WFL.

KAPITEL 36
Umwandlung der Quantoren

In diesem Kapitel werden wir ein paar zusätzliche Regeln zu unserem Herleitungssystem hinzufügen. Diese befassen sich mit dem Zusammenspiel von Quantoren und der Negation.

In §22 stellten wir fest, dass $\neg\exists x\mathscr{A}$ zu $\forall x\neg\mathscr{A}$ äquivalent ist. Wir werden dementsprechende Regeln zu unserem Herleitungssystem hinzufügen:

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall x\,\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\exists x\,\mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

und

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\exists x\,\mathscr{A} & \\ & \forall x\,\neg\mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

Ebenfalls fügen wir

$$\begin{array}{l|ll} m & \exists x\, \neg\mathscr{A} & \\ & \neg\forall x\, \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l|ll} m & \neg\forall x\, \mathscr{A} & \\ & \exists x\, \neg\mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

hinzu.

Übungen

A. Zeigen Sie in jedem Fall, dass die Sätze beweisbar inkonsistent sind:

1. $S(a) \to T(m), T(m) \to S(a), T(m) \land \neg S(a)$
2. $\neg\exists x\, R(x, a), \forall x\, \forall y\, R(y, x)$
3. $\neg\exists x\, \exists y\, L(x, y), L(a, a)$
4. $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall z(P(z) \to R(z)), \forall y\, P(y), \neg Q(a) \land \neg R(b)$

B. Zeigen Sie, dass jedes Satzpaar beweisbar äquivalent ist:

1. $\forall x(A(x) \to \neg B(x)), \neg\exists x(A(x) \land B(x))$
2. $\forall x(\neg A(x) \to B(d)), \forall x\, A(x) \lor B(d)$

C. In §23 haben wir darüber nachgedacht, was passiert, wenn wir Quantoren über verschiedene Operatoren "hinweg" bewegen. Zeigen Sie, dass jedes der folgenden Satzpaare beweisbar äquivalent ist:

1. $\forall x(F(x) \land G(a)), \forall x\, F(x) \land G(a)$
2. $\exists x(F(x) \lor G(a)), \exists x\, F(x) \lor G(a)$
3. $\forall x(G(a) \to F(x)), G(a) \to \forall x\, F(x)$
4. $\forall x(F(x) \to G(a)), \exists x\, F(x) \to G(a)$

5. $\exists x(G(a) \to F(x)), G(a) \to \exists x\, F(x)$
6. $\exists x(F(x) \to G(a)), \forall x\, F(x) \to G(a)$

Beachten Sie: Die Variable 'x' kommt nicht in '$G(a)$' vor. Wenn alle Quantoren am Anfang eines Satzes stehen, ist dieser Satz in *Pränexform*. Die obigen Äquivalenzen werden manchmal als *Pränexionsregeln* bezeichnet, da sie uns erlauben, jeden Satz in eine Pränexform zu gießen.

KAPITEL 37
Identitätsregeln

In §29 erwähnten wir die kontrovers diskutierte These der Identität des Ununterscheidbaren. Laut dieser These sind Objekte, die jeder Hinsicht nach ununterscheidbar sind, identisch. Wir erwähnten auch, dass wir diese These hier nicht akzeptieren werden. Daraus folgt, dass wir, egal wie viel wir über zwei Objekte erfahren, nicht beweisen können, dass sie identisch sind; es sei denn natürlich, man erfährt, dass die beiden Objekte identisch sind, aber dann ist der Beweis nicht allzu interessant.

Allgemein gilt für uns also, dass *keine Sätze*, die nicht schon das Identitätsprädikat enthalten, eine Herleitung von '$a = b$' rechtfertigen. Unsere Identitätseinführungsregel erlaubt uns als nicht, einen Identitätssatz herzuleiten, der zwei *verschiedene* Namen verwendet.

Jedes Objekt ist jedoch mit sich selbst identisch. Daher sind keine Prämissen notwendig, um herzuleiten, dass etwas mit sich selbst identisch ist. Das ist also unsere Identitätseinführungsregel:

$$\begin{array}{|l} \mathcal{c} = \mathcal{c} \qquad =\text{I} \end{array}$$

Diese Regel benötigt kein Zitat einer vorhergehenden Zeile. Für jeden Namen $\mathcal{c}$ können wir direkt auf $\mathcal{c} = \mathcal{c}$ schließen; wir brauchen nur die =I Regel as Rechtfertigung anzugeben.

Unsere Eliminationsregel bietet uns mehr Möglichkeiten. Wenn Sie '$a = b$' haben, dann muss alles, was auf 'a' zutrifft, auch auf 'b' zutreffen. Wir können also in jedem Satz, in dem 'a' vorkommt, einige oder alle Vorkommnisse von 'a' mit 'b' ersetzen. Von '$R(a, a)$' und '$a = b$', können wir z.B. '$R(a, b)$', '$R(b, a)$' und '$R(b, b)$' herleiten. Allgemein gesprochen:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{a} = \mathscr{b} & \\ n & \mathscr{A}(\ldots\mathscr{a}\ldots\mathscr{a}\ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots\mathscr{b}\ldots\mathscr{a}\ldots) & =\text{E } m, n \end{array}$$

Die Notation hier ist die gleiche wie im Fall von ∃I. $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{a}\ldots\mathscr{a}\ldots)$ ist eine Formel, die den Namen $\mathscr{a}$ enthält, und $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{b}\ldots\mathscr{a}\ldots)$ eine Formel, die wir erhalten, indem wir ein Vorkommnis oder mehrere Vorkommnisse von $\mathscr{a}$ mit $\mathscr{b}$ ersetzen. Zeilen m und n können in beliebiger Reihenfolge auftreten, und müssen nicht nebeneinander vorkommen. Aber wir zitieren immer zuerst den Identitätssatz. Symmetrisch erlauben wir auch:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{a} = \mathscr{b} & \\ n & \mathscr{A}(\ldots\mathscr{b}\ldots\mathscr{b}\ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots\mathscr{a}\ldots\mathscr{b}\ldots) & =\text{E } m, n \end{array}$$

Die Regel wird manchmal das *Leibniz-Gesetz* genannt, nach Gottfried Wilhelm Leibniz.

Lasst uns ein paar schnelle Beweise geben, um die Regeln anzuwenden. Zuerst beweisen wir, dass die Identität *symmetrisch* ist:

1	$\quad a = b$	
2	$\quad a = a$	=I
3	$\quad b = a$	=E 1, 2
4	$a = b \rightarrow b = a$	→I 1–3
5	$\forall y(a = y \rightarrow y = a)$	∀I 4
6	$\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$	∀I 5

Wir erhalten Zeile 3, indem wir ein Vorkommnis von 'a' in Zeile 2 mit einem Vorkommnis von 'b' ersetzen; dies dürfen wir, weil '$a = b$'.

Zweitens beweisen wir, dass die Identität *transitiv* ist:

1	$\quad a = b \land b = c$	
2	$\quad a = b$	∧E 1
3	$\quad b = c$	∧E 1
4	$\quad a = c$	=E 2, 3
5	$(a = b \land b = c) \rightarrow a = c$	→I 1–4
6	$\forall z((a = b \land b = z) \rightarrow a = z)$	∀I 5
7	$\forall y \forall z((a = y \land y = z) \rightarrow a = z)$	∀I 6
8	$\forall x \forall y \forall z((x = y \land y = z) \rightarrow x = z)$	∀I 7

Wir erhalten Zeile 4, indem wir 'b' in Zeile 3 mit 'a' ersetzen; dies dürfen wir, weil '$a = b$'.

Übungen

A. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. $P(a) \lor Q(b), Q(b) \rightarrow b = c, \neg P(a) \vdash Q(c)$

2. $m = n \vee n = o, A(n) \vdash A(m) \vee A(o)$
3. $\forall x\, x = m, R(m, a) \vdash \exists x\, R(x, x)$
4. $\forall x\, \forall y(R(x, y) \rightarrow x = y) \vdash R(a, b) \rightarrow R(b, a)$
5. $\neg\exists x \neg x = m \vdash \forall x\, \forall y(P(x) \rightarrow P(y))$
6. $\exists x\, J(x), \exists x\, \neg J(x) \vdash \exists x\, \exists y\, \neg x = y$
7. $\forall x(x = n \leftrightarrow M(x)), \forall x(O(x) \vee \neg M(x)) \vdash O(n)$
8. $\exists x\, D(x), \forall x(x = p \leftrightarrow D(x)) \vdash D(p)$
9. $\exists x\big[(K(x) \wedge \forall y(K(y) \rightarrow x = y)) \wedge B(x)\big], K(d) \vdash B(d)$
10. $\vdash P(a) \rightarrow \forall x(P(x) \vee \neg x = a)$

B. Zeigen Sie, dass die folgenden Sätze beweisbar äquivalent sind.

- $\exists x\big([F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y)] \wedge x = n\big)$
- $F(n) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow n = y)$

C. In §25 behaupteten wir, dass die folgenden Symbolisierungen von ‘Es gibt genau ein F’ beweisbar äquivalent sind:

- $\exists x\, F(x) \wedge \forall x\, \forall y\big[(F(x) \wedge F(y)) \rightarrow x = y\big]$
- $\exists x\big[F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y)\big]$
- $\exists x\, \forall y(F(y) \leftrightarrow x = y)$

Zeigen Sie, dass dem so ist. (*Hinweis*: um zu zeigen, dass die drei Sätze äquivalent sind, reicht es zu zeigen, dass der erste den zweiten zur Folge hat, der zweite den dritten, und der dritte den ersten; überlegen Sie, wieso das so ist.)

D. Symbolisieren Sie das folgende Argument

> Es gibt genau ein F. Es gibt genau ein G. Nichts ist sowohl F als auch G. Also: Es gibt genau zwei Dinge, die entweder F oder G sind.

und geben Sie einen entsprechenden Beweis.

KAPITEL 38
Abgeleitete Regeln

Wie im Falle der WFL führten wir zuerst einige Grundregeln ein (in §34) und fügten dann einige weitere Regeln hinzu (in §36). Tatsächlich sind die Regeln zur Umwandlung der Quantoren *abgeleitete* Regeln, weil sie von den *Grundregeln* in §34 hergeleitet werden können. Hier ist eine Rechtfertigung für die erste Umwandlungsregel:

1	$\forall x\, \neg A(x)$	
2	$\quad \mid\ \exists x\, A(x)$	
3	$\quad \mid\ \quad \mid\ A(c)$	
4	$\quad \mid\ \quad \mid\ \neg A(c)$	$\forall$E 1
5	$\quad \mid\ \quad \mid\ \bot$	$\neg$E 4, 3
6	$\quad \mid\ \bot$	$\exists$E 2, 3–5
7	$\neg \exists x\, A(x)$	$\neg$I 2–6

Und hier ist eine Rechtfertigung für die dritte Umwandlungsregel:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \exists x \, \neg A(x) & \\
\hline
2 & \quad \begin{array}{|l} \forall x \, A(x) \\ \hline \end{array} & \\
3 & \quad \quad \begin{array}{|l} \neg A(c) \\ \hline \end{array} & \\
4 & \quad \quad \begin{array}{|l} A(c) \end{array} & \forall\text{E } 2 \\
5 & \quad \quad \begin{array}{|l} \bot \end{array} & \neg\text{E } 3, 4 \\
6 & \quad \begin{array}{|l} \bot \end{array} & \exists\text{E } 1, 3\text{–}5 \\
7 & \neg \forall x \, A(x) & \neg\text{I } 2\text{–}6
\end{array}
$$

Ähnliche Rechtfertigungen können auch für die zwei verbleibenden Umwandlungsregeln gegeben werden.

Übungen

A. Geben Sie Beweise, die das Hinzufügen der zweiten und vierten Umwandlungsregeln rechtfertigen.

KAPITEL 39
Beweise und Semantik

Wir haben in diesem Lehrbuch zwei unterschiedliche Drehkreuze verwendet. Dieses hier:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$$

bedeutet, dass es einen Beweis gibt, der mit $\mathscr{C}$ beginnt und dessen ungetilgten Annahmen $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ sind. Dieses Drehkreuz ist ein *beweistheoretischer Begriff*. Das zweite Drehkreuz hingegen:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$$

bedeutet, dass es keine Bewertung oder Interpretation gibt, die $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ alle wahr, und $\mathscr{C}$ falsch, macht. Dieses Drehkreuz befasst sich mit Zuordnungen von Wahrheitswerten zu Sätzen. Es ist ein *semantischer Begriff*.

Es ist sehr wichtig, dass es sich hier um zwei unterschiedliche Begriffe handelt. Erst wenn Sie diesen Punkt verinnerlicht haben, lesen Sie weiter.

Obwohl unsere semantischen und beweistheoretischen Begriffe unterschiedlich sind, sind sie eng verwandt. Um das zu erklären, werden wir zunächst die Beziehung zwischen Tautologien und Theoremen betrachten.

Um zu zeigen, dass ein Satz ein Theorem ist, brauchen Sie nur einen Beweis zu erbringen. Zugegeben, es mag schwierig sein, einen zwanzigzeiligen Beweis zu erbringen, aber es ist nicht so schwierig, jede Zeile des Beweises zu überprüfen und zu bestätigen, dass sie zulässig ist. Und wenn jede Zeile des Beweises für sich betrachtet zulässig ist, dann ist der gesamte Beweis zulässig. Um zu zeigen, dass ein Satz eine Tautologie ist, müssen wir jedoch alle möglichen Interpretationen überblicken. Müssten wir wählen, ob wir nachweisen, dass ein Satz ein Theorem ist, oder nachweisen, dass er eine Tautologie ist, wäre es einfacher zu zeigen, dass es sich um ein Theorem handelt.

Umgekehrt gilt: zu zeigen, dass ein Satz *kein* Theorem ist, ist schwer. Wir müssen alle (möglichen) Beweise überblicken. Um jedoch zu zeigen, dass ein Satz *keine* Tautologie ist, brauchen Sie nur eine Interpretation zu konstruieren, in der dieser Satz falsch ist. Zugegeben, es mag schwierig sein, eine solche Interpretation zu finden; aber wenn Sie das einmal getan haben, ist es relativ einfach zu überprüfen, welchen Wahrheitswert sie einem Satz zuweist. Müssten wir wählen ob wir nachweisen, dass ein Satz kein Theorem ist, oder nachweisen, dass er keine Tautologie ist, wäre es einfacher zu zeigen, dass es sich nicht um eine Tautologie handelt.

Glücklicherweise ist *ein Satz genau dann ein Theorem, wenn er eine Tautologie ist.* Wenn wir also einen Beweis $\mathscr{A}$s ohne ungetilgte Annahmen erbringen und zeigen, dass $\mathscr{A}$ ein Theorem ist ($\vdash \mathscr{A}$), dann zeigen wir auch, dass $\mathscr{A}$ eine Tautologie ist ($\vDash \mathscr{A}$). Ähnlicherweise gilt: wenn wir eine Interpretation konstruieren in der $\mathscr{A}$ falsch ist und zeigen, dass es keine Tautologie ist ($\nvDash \mathscr{A}$), dann zeigen wir auch, dass $\mathscr{A}$ kein Theorem ist ($\nvdash \mathscr{A}$).

Allgemein gesprochen haben wir das folgende wirkmächtige Resultat:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B} \textbf{genau dann}, \textbf{wenn} \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{B}$$

Das zeigt, dass Beweisbarkeit und Folge zwar *verschiedene* Begriffe sind, aber die *gleiche* Extension haben:

- Ein Argument ist *gültig* genau dann, wenn *die Schlussfolgerung von den Prämissen hergeleitet werden kann.*
- Zwei Sätze sind *äquivalent* genau dann, wenn sie *beweisbar äquivalent sind.*

- Sätze sind *konsistent* genau dann, wenn sie *nicht beweisbar inkonsistent* sind.

Aus diesem Grund können Sie sich aussuchen, wann Sie auf Beweise und auf Bewertungen/Interpretationen zurückgreifen. Je nachdem, was für eine bestimmte Aufgabe einfacher ist, können Sie den Weg des geringeren Widerstands gehen. Die Tabelle auf der nächsten Seite fasst zusammen, was (in der Regel) einfacher ist.

Es ist intuitiv, dass Beweisbarkeit und Folge übereinstimmen. Aber–lasst uns das wiederholen–wir dürfen uns nicht von der Ähnlichkeit der Symbole '$\vDash$' und '$\vdash$' täuschen lassen. Diese beiden Symbole haben sehr unterschiedliche Bedeutungen. Die Tatsache, dass Beweisbarkeit und Folge übereinstimmen, ist kein leicht zu erreichendes Ergebnis. Tatsächlich ist der Nachweis, dass Beweisbarkeit und Folge übereinstimmen, ein entscheidender Punkt, an dem wir die Logik für Fortgeschrittene erreichen.

	Ja	**Nein**
Ist $\mathscr{A}$ eine **Tautologie**?	Beweis der zeigt, dass $\vdash \mathscr{A}$	Interpretation, in der $\mathscr{A}$ falsch ist
Ist $\mathscr{A}$ ein **Widerspruch**?	Beweis der zeigt, dass $\vdash \neg\mathscr{A}$	Interpretation, in der $\mathscr{A}$ wahr ist
Sind $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ **äquivalent**?	zwei Beweise, einer für $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$, einer für $\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$	Interpretation. in der $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ verschiedene Wahrheitswerte haben
Sind $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ **konsistent**?	Interpretation in der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ alle wahr sind	Beweis eines Widerspruchs ausgehend von $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$
Ist $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ **gültig**?	Beweis mit Annahmen $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ und Schlussfolgerung $\mathscr{C}$	Interpretation, in der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch ist

TEIL VIII

Modale Logik

KAPITEL 40

Einführung in die modale Logik

Die modale Logik (ML) ist die Logik der *Modalitäten*, der Weisen, auf die ein Satz wahr sein kann. *Notwendigkeit* und *Möglichkeit* sind zwei solche Modalitäten: ein Satz kann wahr sein, aber er kann auch notwendigerweise wahr sein (wahr, egal wie die Welt auch beschaffen sein mag). Logische Wahrheiten sind z.B. nicht nur zufälligerweise wahr. Sie sind notwendigerweise wahr. Ein Satz kann möglicherweise wahr sein, selbst, wenn er nicht tatsächlich wahr ist. Wir benutzen $\Box$, um die Notwendigkeit auszudrücken und $\Diamond$, um die Möglichkeit auszudrücken. Sie können also $\Box\mathscr{A}$ als *Es ist notwendigerweise der Fall, dass* $\mathscr{A}$ und $\Diamond\mathscr{A}$ als *Es ist möglicherweise der Fall, dass* $\mathscr{A}$ verstehen.

Es gibt viele verschiedene Arten von Notwendigkeiten. Es ist *menschlich* unmöglich für mich, 100 Km/h schnell zu laufen. Angesichts der Art von Tier, das der Mensch ist, kann das kein Mensch tun. Aber dennoch ist es für mich *physikalisch* nicht unmöglich, so schnell zu laufen. Wir haben noch nicht die Technologie dafür, aber es ist sicher physikalisch möglich, meine menschlichen Beine gegen Roboterbeine auszutauschen, mithilfe derer ich dann 100 Km/h schnell laufen kann. Im Gegensatz dazu ist es für mich physikalisch unmöglich, schneller als mit Lichtgeschwindigkeit zu laufen. Die Gesetze der Physik verbieten es jedem Objekt, auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen. Aber rein *logisch* gesehen ist selbst das nicht unmöglich. Es ist kein Widerspruch, sich vorzustellen, dass die Gesetze der Physik anders sind und sie es Dingen erlauben, sich schneller als das Licht zu bewegen.

Mit welcher Art von Modalität befasst sich ML? *Mit allen!* ML ist ein sehr flexibles Werkzeug. Wir beginnen mit einigen grundlegenden Regeln, die für $\Box$ und $\Diamond$ gelten, und fügen dann weitere Regeln hinzu, um verschiedene Modalitäten zu repräsentieren. Tatsächlich ist ML so flexibel, dass wir $\Box$ und $\Diamond$ nicht einmal so verstehen müssen, dass sie *Notwendigkeit* und *Möglichkeit* ausdrücken. Wir könnten stattdessen $\Box$ als Ausdruck der *Beweisbarkeit* lesen, so dass wir $\Box\mathscr{A}$ als *es ist beweisbar, dass* $\mathscr{A}$ und $\Diamond\mathscr{A}$ als *es ist nicht widerlegbar, dass* $\mathscr{A}$ verstehen. In ähnlicher Weise können wir $\Box\mathscr{A}$ so interpretieren, dass *S weiSS, dass* $\mathscr{A}$ oder *S glaubt, dass* $\mathscr{A}$ bedeutet. Oder wir können $\Box$ als Ausdruck einer *moralischen Verpflichtung* lesen, so dass $\Box\mathscr{A}$ bedeutet, dass $\mathscr{A}$ moralisch verpflichtend ist, und $\Diamond\mathscr{A}$, dass $\mathscr{A}$ moralisch zulässig ist. Alles, was wir tun müssen, um diese verschiedenen Interpretationen zu erhalten, ist, die richtigen Regeln für diese unterschiedlichen Lesarten von $\Box$ und $\Diamond$ auszuarbeiten.

Ein modaler Satz ist einer, der modale Operatoren wie $\Box$ und $\Diamond$ beinhaltet. Je nach Interpretation, die wir $\Box$ und $\Diamond$ zuweisen, werden unterschiedliche modale Sätze beweisbar oder gültig sein. Zum Beispiel: $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ könnte sagen, dass 'wenn $\mathscr{A}$ notwendig ist, dann ist es wahr,' solange wir $\Box$ als Notwendigkeit interpretieren. Oder es könnte besagen, dass 'wenn S weiSS, dass $\mathscr{A}$, dann ist es wahr,' solange $\Box$ das Wissen ausdrückt. Unter diesen beiden Interpretationen ist $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ gültig: Alle Sätze die notwendigerweise wahr sind, sind tatsächlich wahr. Und wenn jemand weiSS, dass $\mathscr{A}$, dann ist $\mathscr{A}$ wahr (denn man kann nicht wissen, was falsch ist). Wenn jedoch $\Box$ als 'es wird geglaubt, dass' oder 'es sollte der Fall sein, dass' interpretiert wird, dann ist $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ nicht gültig: Wir können falschen Behauptungen glauben schenken. Und nicht jeder Satz, der wahr sein sollte, ist tatsächlich wahr, z.B.: 'Niemand begeht Morde'. Dieser Satz *sollte* wahr sein, ist es aber leider nicht.

Wir werden verschiedene Systeme der ML in Betracht ziehen. Sie unterscheiden sich in ihren Herleitungsregeln und in der

Semantik, die wir verwenden, um unsere logischen Begriffe zu definieren. Die verschiedenen Systeme, die wir betrachten werden, heiSSen **K**, **T**, **S4**und **S5**. **K** ist das Basissystem; alles, was in **K** gültig oder beweisbar ist, ist auch in den anderen beweisbar. Aber es gibt einige Dinge, die in **K** nicht beweisbar sind, wie zum Beispiel der Satz $\Box A \rightarrow A$ für einen beliebigen Satzbuchstaben A. Daher ist **K** keine angemessene modale Logik für Notwendigkeit und Möglichkeit; denn hier sollte $\Box\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$ beweisbar sein. System **T**stellt sich hierfür als besser geeignet heraus. Denn in diesem System ist $\Box\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$ beweisbar. **T** ist also bei der Behandlung von Notwendigkeit und Möglichkeit angemessener, aber weniger angemessen, wenn es wir uns mit Glauben oder der moralischen Verpflichtung beschäftigen wollen, da dann $\Box\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$ *nicht* (immer) beweisbar sein sollte. Das vielleicht beste System der ML für Notwendigkeit und Möglichkeit, auf jeden Fall das am weitesten verbreitete, ist das stärkste der von uns betrachteten Systeme, **S5**.

40.1 Die Sprache der modalen Logik

Um die modale Logik anzuwenden, müssen wir zwei Dinge tun. Erstens wollen wir lernen, wie wir Dinge in der ML beweisen können. Zweitens wollen wir sehen, wie man Interpretationen für die ML konstruiert. Aber bevor wir diese beiden Dinge tun können, müssen wir erklären, wie man Sätze in der ML konstruiert.

Die Sprache der ML ist eine Erweiterung der WFL. Wir könnten auch auf Basis der LEO beginnen, dann würden wir die Quantifizierte Modale Logik (QML) erhalten. QML ist viel ausdrucksstärker als die ML, aber sie ist auch viel, viel komplizierter. Wir werden die Dinge also einfach halten und mit WFL beginnen.

Genau wie die WFL beginnt die ML mit einem unendlichen Vorrat an *Basiselementen*. Diese werden als GroSSbuchstaben geschrieben, mit oder ohne tiefgestellten Nummern: A, B, ... A_1, B_1, ... Wir nehmen dann alle Regeln, wie man Sätze aus WFL bildet, und fügen zwei weitere für $\Box$ und $\Diamond$ hinzu:

(1) Jedes Basiselement der ML ist ein Satz der ML.

(2) Wenn $\mathscr{A}$ ein Satz der modalen Logik ist, dann ist $\neg\mathscr{A}$ ein Satz der ML.

(3) Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze der ML sind, dann ist $(\mathscr{A} \land \mathscr{B})$ ein Satz der ML.

(4) Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze der ML sind, dann ist $(\mathscr{A} \lor \mathscr{B})$ ein Satz der ML.

(5) Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze der ML sind, dann ist $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ ein Satz der ML.

(6) Wenn $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ Sätze der ML sind, dann ist $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ ein Satz der ML.

(7) Wenn $\mathscr{A}$ ein Satz der ML ist, dann ist $\Box\mathscr{A}$ ein Satz der ML.

(8) Wenn $\mathscr{A}$ ein Satz der ML ist, dann ist $\Diamond\mathscr{A}$ ein Satz der ML.

(9) Nichts anderes ist ein Satz der ML.

Hier sind einige Beispiele:

$$A,\ P \lor Q,\ \Box A,\ C \lor \Box D,\ \Box\Box(A \rightarrow R),\ \Box\Diamond(S \land (Z \leftrightarrow (\Box W \lor \Diamond Q)))$$

KAPITEL 41

Natürliche Herleitung für die ML

Jetzt, da wir wissen, wie wir in der ML Sätze bilden, können wir uns ansehen, wie wir in der ML Dinge herleiten können. Wir werden $\vdash$ verwenden, um Beweisbarkeit auszudrücken. So bedeutet $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$, dass $\mathscr{C}$ von $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ aus hergeleitet werden kann. Wir werden uns jedoch mit einer Reihe verschiedener Systeme der ML befassen. Daher wird es nützlich sein, ein Subskript hinzuzufügen, das angibt, mit welchem System wir arbeiten. Wenn wir also zum Beispiel sagen wollen, dass wir $\mathscr{C}$ von $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ *in System* **K**aus herleiten können, dann schreiben wir: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$.

41.1 System K

Wir beginnen mit einem besonders einfachen System namens **K**, benannt nach dem Philosophen und Logiker Saul Kripke. **K** umfasst alle natürlichen Herleitungsregeln der WFL, einschlieSSlich der abgeleiteten Regeln sowie der Grundregeln. **K** fügt dann eine besondere Art von Unterbeweis hinzu, sowie zwei neue Grundregeln für $\Box$.

Die spezielle Art des Unterbeweises sieht gewöhnlich aus; auSSer, dass er statt eines Satzes ein $\Box$ in seiner Annahmezeile hat. Wir nennen ihn einen *strengen Unterbeweis*—er erlaubt es, Dinge über andere Möglichkeiten, abseits der tatsächlichen Welt, zu begründen und zu beweisen. Was wir innerhalb eines strengen Unterbeweises beweisen können, gilt für jede alternative Möglichkeit, insbesondere für andere Möglichkeiten, bei denen die in unserem Beweis ansonsten geltenden Annahmen möglicherweise *nicht* zutreffen. In einem strikten Unterbeweis werden alle Annahmen auSSer Acht gelassen, und es ist uns nicht erlaubt, uns auf irgendwelche Zeilen auSSerhalb des strengen Unterbeweises zu berufen (es sei denn, dies ist laut den unten angegebenen modalen Regeln zulässig).

Die $\Box$I-Regel erlaubt es uns, eine Formel $\Box\mathscr{A}$ herzuleiten, wenn wir $\mathscr{A}$ innerhalb eines strengen Unterbeweises herleiten. Diese Regel ist unsere grundlegende Methode, $\Box$ in Beweise einzuführen. Die Grundidee ist einfach: Wenn $\mathscr{A}$ ein Theorem ist, dann sollte auch $\Box\mathscr{A}$ ein Theorem sein. (Denken Sie daran, dass die Bezeichnung $\mathscr{A}$s als ein Theorem heiSSt, dass wir $\mathscr{A}$ beweisen können, ohne uns auf irgendwelche unentlassenen Annahmen zu berufen).

Nehmen Sie an, wir wollen $\Box(A \to A)$ beweisen. Das erste, was wir tun müssen, ist zu beweisen, dass $A \to A$ ein Theorem ist. Sie wissen bereits, wie man das in der WFL macht. Sie legen einfach einen Beweis für $A \to A$ vor, der ohne Prämissen beginnt, so wie hier:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \quad\begin{array}{|l} A \\ \hline \end{array} & \\
2 & \quad\begin{array}{|l} A \end{array} & \text{R } 1 \\
3 & A \to A & \to\text{I } 1\text{–}2
\end{array}
$$

Aber um $\Box$I anwenden zu können, müssen wir den Satz innerhalb eines strengen Unterbeweises bewiesen haben. Da unser Beweis von $A \to A$ keine Annahmen verwendet, ist dies möglich.

1	$\quad\mid\ \Box$	
2	$\quad\mid\quad\mid\ A$	
3	$\quad\mid\quad\mid\ A$	R 2
4	$\quad\mid\ A \to A$	$\to$I 2–3
5	$\Box(A \to A)$	$\Box$I 1–4

m	$\quad\mid\ \Box$	
n	$\quad\mid\ \mathscr{A}$	
	$\Box\mathscr{A}$	$\Box$I m–n

Keine Zeile über der Zeile m darf von irgendeiner Regel innerhalb des strengen Unterbeweises, der in Zeile m beginnt, zitiert werden; es sei denn, die Regel erlaubt dies ausdrücklich.

Es ist sehr wichtig, dass Sie im strengen Unterbeweis keine Regel anwenden können, die sich auf etwas bezieht, das Sie auSSerhalb des strengen Unterbeweises bewiesen haben. Es gibt zwar Ausnahmen, z.B. die untenstehende $\Box$E-Regel. Aber diese Ausnahmen besagen ausdrücklich, dass Sie sie innerhalb des strengen Unterbeweises anwenden können, obwohl sie Zeilen auSSerhalb des strengen Unterbeweises zitieren.

Die eben genannte Einschränkung ist sehr wichtig. Denn ohne sie würden wir schnell schreckliche Ergebnisse erhalten. Zum Beispiel könnten wir den folgenden Beweis liefern, um $A \therefore \Box A$

herzuleiten:

$$
\begin{array}{rll}
1 & \vert\ A & \\
\hline
2 & \vert\ \vert\ \Box & \\
3 & \vert\ \vert\ A & \text{falsche Anwendung von R 1} \\
4 & \vert\ \Box A & \Box\text{I } 2\text{–}3
\end{array}
$$

Dies ist kein legitimer Beweis, denn in Zeile 3 haben wir uns auf Zeile 1 berufen, obwohl Zeile 1 vor dem Beginn des strengen Unterbeweises in Zeile 2 steht.

Wir haben oben gesagt, dass ein strenger Unterbeweis uns erlaubt, über beliebige andere Möglichkeiten nachzudenken. Was in einem strengen Unterbeweis bewiesen werden kann, gilt in allen anderen Möglichkeiten und ist daher notwendigerweise wahr. Dies ist die Idee hinter der □I-Regel. Wenn wir andererseits angenommen haben, dass etwas notwendig ist, haben wir damit angenommen, dass es in allen Möglichkeiten wahr ist. Daher haben wir die Regel □E:

$$
\begin{array}{rll}
m & \vert\ \Box\mathscr{A} & \\
 & \vert\ \vert\ \Box & \\
n & \vert\ \vert\ \mathscr{A} & \Box\text{E } m
\end{array}
$$

□E kann nur angewendet werden, wenn die Zeile m (die □A enthält) *auSSerhalb* des strengen Unterbeweises liegt, in dem die Zeile n vorkommt, und dieser strenge Unterbeweis nicht Teil eines (weiteren) strengen Unterbeweises ist, der m nicht enthält.

□E erlaubt es Ihnen, $\mathscr{A}$ innerhalb eines strengen Unterbeweises geltend zu machen, wenn Sie □$\mathscr{A}$ auSSerhalb des strengen Unterbeweises haben. Die Einschränkung bedeutet, dass Sie dies nur im ersten strengen Unterbeweis tun können. Sie können die Regel $\Box$E also nicht innerhalb eines verschachtelten strengen Unterbeweises anwenden. Das Folgende ist damit nicht erlaubt:

$$
\begin{array}{r|l|l|ll}
1 & \Box\mathscr{A} & & & \\
2 & & \Box & & \\
\cline{3-3}
3 & & & \Box & \\
\cline{4-4}
4 & & & \mathscr{A} & \text{falsche Anwendung von } \Box\text{E } 1
\end{array}
$$

Die missbräuchliche Anwendung von $\Box$E in Zeile 4 verstöSSt gegen die Bedingung, denn obwohl Zeile 1 auSSerhalb des strengen Unterbeweises liegt, in dem Zeile 4 vorkommt, liegt der strenge Unterbeweis, in dem Zeile 4 vorkommt, innerhalb des strengen Unterbeweises, der mit Zeile 2 beginnt und Zeile 1 nicht enthält.

Wenden wir uns nun einem Beispiel zu:

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & \Box A & & \\
2 & \Box B & & \\
\cline{2-2}
3 & & \Box & \\
\cline{3-3}
4 & & A & \Box\text{E } 1 \\
5 & & B & \Box\text{E } 2 \\
6 & & A \wedge B & \wedge\text{I } 4, 5 \\
7 & \Box(A \wedge B) & & \Box\text{I } 3\text{–}7
\end{array}
$$

Wir können auch reguläre und strenge Unterbeweise vermischen:

1	$\Box(A \to B)$	
2	$\quad \Box A$	
3	$\quad\quad \Box$	
4	$\quad\quad A$	$\Box$E m
5	$\quad\quad A \to B$	$\Box$E 1
6	$\quad\quad B$	$\to$E 4, 5
7	$\quad \Box B$	
8	$\Box A \to \Box B$	$\to$I 2–7

Dies wird die *Verteilungsregel* genannt, weil sie uns sagt, dass $\Box$ über $\to$ hinweg 'verteilt' werden kann.

Die Regeln $\Box$I und $\Box$E sind recht einfach und in der Tat ist **K** ein recht einfaches System! Aber **K**ist mächtiger, als Sie vielleicht gedacht haben. Sie können darin eine ganze Reihe von Dingen beweisen.

41.2 Möglichkeit

Im letzten Abschnitt haben wir uns die Grundregeln für System **K**angesehen. Ihnen ist sicherlich aufgefallen, dass es bei all diesen Regeln um die Notwendigkeit ging, $\Box$, und bei keiner von ihnen um die Möglichkeit, $\Diamond$. Das liegt daran, dass wir die Möglichkeit mittels der Notwendigkeit definieren können:

$$\Diamond\mathscr{A} =_{df} \neg\Box\neg\mathscr{A}$$

Mit anderen Worten: zu sagen, dass $\mathscr{A}$ *möglicherweise* wahr ist, heiSSt, dass $\mathscr{A}$ *nicht notwendigerweise falsch* ist. Infolgedessen ist es nicht notwendig, $\Diamond$, ein besonderes Symbol für die Möglichkeit, in das System **K**einzuführen. Dennoch wird das System viel einfacher zu benutzen sein, wenn wir das tun. Deshalb werden wir die folgenden Definitionsregeln hinzufügen:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \\ & \Diamond\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

Diese Regeln sind keine wirkliche Ergänzung von **K**. Sie schreiben lediglich fest, wie $\Diamond$ mittels $\Box$ definiert wird.

Wenn wir wollten, bräuchten wir keine weiteren Regeln für **K** einführen. Es ist aber hilfreich, einige *Modalwechsel*regeln hinzuzufügen, die uns einige weitere Möglichkeiten geben, zwischen $\Box$ und $\Diamond$ hin und her zu wechseln:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\mathscr{A} & \\ & \Diamond\neg\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Diamond\mathscr{A} & \\ & \Box\neg\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Box\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Diamond\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

Diese Modalwechselregeln sind ebenfalls keine wirkliche Ergänzung von **K**, da sie sich aus den Grundregeln zusammen mit der Definition von $\Diamond$ herleiten lassen.

Im System **K**, kann man, mittels der Definitionsregeln (oder den Modalwechselregeln), $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$ herleiten. Als wir das System **K**einführten, begannen wir mit $\Box$ als unserem basalen Modalsymbol. Dann definierten wir $\Diamond$ mittels dieses basalen Modalsymbols. Aber wenn wir es vorgezogen hätten, dann hätten wir mit $\Diamond$ als unserem basalen Symbol beginnen und $\Box$ wie folgt definieren können: $\Box\mathscr{A} =_{df} \neg\Diamond\neg\mathscr{A}$. Es ist also nicht der Fall, dass die Notwendigkeit irgendwie mehr *fundamental* als die Möglichkeit ist. Notwendigkeit und Möglichkeit sind gleich fundamental.

41.3 System T

Bisher haben wir uns auf **K**konzentriert, welches ein sehr einfaches modales System ist. **K** ist so schwach, dass sich nicht einmal $\mathscr{A}$ von $\Box\mathscr{A}$ herleiten lässt. Aber wenn wir uns $\Box$ als Ausdruck der *Notwendigkeit* vorstellen, dann wollen wir in der Lage sein, diese Schlussfolgerung zu ziehen: Wenn $\mathscr{A}$ *notwendigerweise wahr* ist, dann muss es auch *tatsächlich wahr* sein.

Dies führt uns zu einem neuen System, **T**, das wir erhalten, indem wir die folgende Regel zu **K**hinzufügen:

$$\begin{array}{l|ll} m & \Box\mathscr{A} & \\ n & \mathscr{A} & \text{R}\mathbf{T}\ m \end{array}$$

Die Zeile n, in der die Regel R**T** angewendet wird, darf *nicht* in einem strengen Unterbeweis liegen, der nach Zeile m beginnt.

Die Einschränkung der Regel R**T** ist gewissermaSSen das Gegenteil der Einschränkung von $\Box$E: Sie können $\Box$E *nur* in einem verschachtelten strengen Unterbeweis verwenden; hingegen können Sie R**T** *nicht* in einem verschachtelten strengen Unterbeweis anwenden.

Wir können Dinge in **T** beweisen, die wir in **K**nicht herleiten konnten, z.B. $\Box A \to A$.

41.4 System S4

T erlaubt es Ihnen, das Kästchen für die Notwendigkeit zu entfernen: aus dem Satz $\Box\mathscr{A}$ können Sie $\mathscr{A}$ herleiten. Aber was wäre, wenn wir zusätzliche Kästchen hinzufügen wollten? Das heiSSt, was wäre, wenn wir von $\Box\mathscr{A}$ zu $\Box\Box\mathscr{A}$ gehen wollten? Nun, das wäre kein Problem, wenn wir $\Box\mathscr{A}$ bewiesen hätten, indem wir $\Box$I auf einen strikten Unterbeweis von $\mathscr{A}$ angewandt hätten, der selbst nicht $\Box$E verwendet. In diesem Fall ist $\mathscr{A}$ eine Tautologie. Und indem wir den strengen Unterbeweis in einen anderen strengen Unterbeweis einbauen und $\Box$I erneut anwenden, können wir $\Box\Box\mathscr{A}$ beweisen. Zum Beispiel könnten wir $\Box\Box(P \to P)$ wie folgt beweisen:

1	$\mid \underline{\Box}$	
2	$\mid\ \mid \underline{\Box}$	
3	$\mid\ \mid\ \mid \underline{P}$	
4	$\mid\ \mid\ \mid P$	R 3
5	$\mid\ \mid P \to P$	$\to$I 3–4
6	$\mid \Box(P \to P)$	$\Box$I 2–5
7	$\Box\Box(P \to P)$	$\Box$I 1–6

Aber was wäre, wenn wir $\Box\mathscr{A}$ nicht auf diese eingeschränkte Weise herleiten würden, sondern $\Box$E innerhalb des strengen Unterbeweises von $\mathscr{A}$ verwenden würden? Wenn wir diesen strengen Unterbeweis innerhalb eines anderen strengen Unterbeweises verwenden würden, würden wir die Bedingung der Regel $\Box$E verletzen, dass wir keine Zeile mit $\Box\mathscr{A}$ zitieren, die in einem anderen strengen Unterbeweis liegt, der noch nicht abgeschlossen ist. Oder was wäre, wenn $\Box\mathscr{A}$ nur eine Annahme wäre, mit der wir unseren Beweis begonnen haben? Könnten wir dann auf $\Box\Box\mathscr{A}$ schlieSSen? Nicht in **T**. Dies aber könnte Ihnen durchaus als ein Mangel von **T**erscheinen, zumindest wenn wir $\Box$ als Ausdruck der *Notwendigkeit* lesen. Intuitiv ist, dass wenn $\mathscr{A}$ notwendigerweise wahr ist, es nicht möglich ist, dass $\mathscr{A}$ nicht notwendigerweise wahr ist. Was notwendigerweise wahr ist, ist also, intuitiv zumindest, notwendigerweise notwendigerweise wahr.

Dies führt uns zu einem weiteren neuen System, **S4**, das wir durch Hinzufügen der folgenden Regel zu **T**erhalten:

$$
\begin{array}{r|l}
m & \Box\mathscr{A} \\
 & \quad \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \\
n & \quad \begin{array}{|l} \Box\mathscr{A} \qquad \text{R}\mathbf{4}\ m \end{array}
\end{array}
$$

Beachten Sie, dass R**4** nur dann angewendet werden kann, wenn die Zeile m (die $\Box A$ enthält) auSSerhalb des strengen Unterbeweises liegt, in dem Zeile n vorkommt, und dieser strenge Unterbeweis nicht Teil eines strengen Unterbeweises ist, in dem n nicht vorkommt.

Regel R**4** sieht genauso aus wie $\Box$E, mit dem Unterschied, dass sie $\Box\Box\mathscr{A}$ innerhalb eines strengen Unterbeweises herleiten können. Die Einschränkung ist jedoch die gleiche: R**4** erlaubt es uns, $\Box\mathscr{A}$ in einen strengen Unterbeweis zu "importieren", aber nicht in einen strengen Unterbeweis, der innerhalb eines weiteren strengen Unterbeweises vorkommt. Falls dies jedoch notwendig ist, würde eine zusätzliche Anwendung von R**4** dasselbe Ergebnis haben.

Jetzt können wir weitere Dinge beweisen. Beispielsweise:

1	$\quad \Box A$	
2	$\quad\quad \Box$	
3	$\quad\quad \Box A$	**R4** 1
4	$\quad \Box\Box A$	$\Box$I 2–3
5	$\Box A \to \Box\Box A$	$\to$I 1–6

In ähnlicher Weise können wir $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$ herleiten. Dies zeigt uns, dass wir nicht nur zusätzliche Kästchen kriegen können; **S4** erlaubt es uns auch, Diamanten zu eliminieren: aus $\Diamond\Diamond\mathscr{A}$ kann man $\Diamond\mathscr{A}$ herleiten.

41.5 System S5

In **S4**können wir immer ein Kästchen vor einem anderen Kästchen einfügen. Aber **S4** lässt nicht zu, dass wir automatisch ein Kästchen vor einem *Diamanten* einfügen können. Das heiSSt, **S4** erlaubt es uns im Allgemeinen nicht, $\Box\Diamond\mathscr{A}$ aus $\Diamond\mathscr{A}$ herzuleiten. Aber auch das könnte Ihnen als Mangel erscheinen, zumindest, wenn Sie $\Box$ und $\Diamond$ als Ausdrücke der Notwendigkeit und Möglichkeit verstehen. Intuitiv ist, dass, wenn $\mathscr{A}$ möglicherweise wahr ist, es nicht möglich ist, dass es doch nicht möglicherweise wahr ist. Was möglicherweise wahr ist, ist also, zumindest intuitiv, notwendigerweise möglicherweise wahr.

Dies führt uns zu unserem letzten Modalsystem, **S5**, das wir erhalten, indem wir die folgende Regel zu **S4**hinzufügen:

$$
\begin{array}{r|l l}
m & \neg\Box\mathscr{A} & \\
 & \quad \begin{array}{|l}\Box \\ \hline \end{array} & \\
n & \quad \begin{array}{|l}\neg\Box\mathscr{A}\end{array} & \mathrm{R}\mathbf{5}\ m
\end{array}
$$

Regel R**5** kann nur angewendet werden, wenn die Zeile m (die $\neg\Box\mathscr{A}$ enthält) auSSerhalb des strengen Unterbeweises liegt, in dem Zeile n vorkommt, und dieser strenge Unterbeweis nicht Teil eines strengen Unterbeweises ist, der die Zeile m nicht enthält.

Mit dieser Regel können wir z.B. zeigen, dass $\Diamond\Box A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box A$:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \Diamond\Box A & \\
\hline
2 & \neg\Box\neg\Box A & \mathrm{Def}\Diamond\ 1 \\
3 & \quad \neg\Box A & \\
4 & \quad\quad \Box & \\
5 & \quad\quad \neg\Box A & \mathrm{R}\mathbf{5}\ 3 \\
6 & \quad \Box\neg\Box A & \Box\mathrm{I}\ 4\text{–}5 \\
7 & \quad \bot & \neg\mathrm{E}\ 2, 6 \\
8 & \Box A & \mathrm{IP}\ 3\text{–}7
\end{array}
$$

Wir können also nicht nur Kästchen vor Diamanten einfügen, sondern auch Diamanten vor den Kästchen löschen.

Wir erhielten **S5**, indem wir einfach die Regel R**5** zu **S4**hinzufügten. Tatsächlich hätten wir *nur* die Regel R**5** zu **T** hinzufügen müssen, ohne den Umweg über Regel R**4** zu gehen. Alles, was wir mit Regel R**4** beweisen können, lässt sich auch mit R**T** zusammen mit R**5** beweisen. Hier ist zum Beispiel ein Beweis, der $\Box A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\Box A$ herleitet, ohne **R4** anzuwenden:

1	$\Box A$	
2	$\mid\ \Box\neg\Box A$	
3	$\mid\ \neg\Box A$	**RT** 2
4	$\mid\ \bot$	$\neg$E 1, 3
5	$\neg\Box\neg\Box A$	$\neg$I 2–4
6	$\mid\ \Box$	
7	$\mid\ \mid\ \neg\Box A$	
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \Box$	
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\Box A$	**R5** 7
10	$\mid\ \mid\ \Box\neg\Box A$	$\Box$I 8–9
11	$\mid\ \mid\ \neg\Box\neg\Box A$	**R5** 5
12	$\mid\ \mid\ \bot$	$\neg$E 10, 11
13	$\mid\ \Box A$	IB 7–12
14	$\Box\Box A$	$\Box$I 6–13

S5 ist strikt stärker als **S4**: es gibt Dinge, die in **S5**bewiesen werden können, aber nicht in **S4S4** (z.B. $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$).

Die zentrale Eigenschaft von **S5** kann auch wie folgt formuliert werden: Wenn Sie eine lange Reihe von Kästchen und Diamanten haben, in welcher Kombination auch immer, können Sie alle bis auf das letzte Element in der Reihe löschen. So kann zum Beispiel $\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\Box A$ zu $\Box A$ vereinfacht werden.

Übungen

A. Geben Sie Beweise für die folgenden Aussagen:

1. $\Box(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}} \Box A \wedge \Box B$
2. $\Box A \wedge \Box B \vdash_{\mathbf{K}} \Box(A \wedge B)$
3. $\Box A \vee \Box B \vdash_{\mathbf{K}} \Box(A \vee B)$
4. $\Box(A \leftrightarrow B) \vdash_{\mathbf{K}} \Box A \leftrightarrow \Box B$

B. Geben Sie Beweise für die folgenden Aussagen an, ohne Modalwechselregeln zu verwenden:

1. $\neg\Box A \vdash_{\mathbf{K}} \Diamond\neg A$
2. $\Diamond\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Box A$
3. $\neg\Diamond A \vdash_{\mathbf{K}} \Box\neg A$
4. $\Box\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$

C. In den folgenden Fällen ist es Ihnen erlaubt, die Modalwechselregeln in Ihren Beweisen zu verwenden:

1. $\Box(A \to B), \Diamond A \vdash_{\mathbf{K}} \Diamond B$
2. $\Box A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond\neg A$
3. $\neg\Diamond\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \Box A$

D. Geben Sie Beweise für die folgenden Aussagen:

1. $P \vdash_{\mathbf{T}} \Diamond P$
2. $\vdash_{\mathbf{T}} (A \wedge B) \vee (\neg\Box A \vee \neg\Box B)$

E. Geben Sie Beweise für die folgenden Aussagen:

1. $\Box(\Box A \to B), \Box(\Box B \to C), \Box A \vdash_{\mathbf{S4}} \Box\Box C$
2. $\Box A \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\Box A \vee B)$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathbf{S4}} \Diamond A$

F. Geben Sie Beweise in **S5** für die folgenden Aussagen:

1. $\neg\Box\neg A, \Diamond B \vdash_{\mathbf{S5}} \Box(\Diamond A \wedge \Diamond B)$
2. $A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\Diamond A$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathbf{S5}} \Diamond A$

KAPITEL 42

Semantik der ML

Bis jetzt haben wir uns darauf konzentriert, verschiedene Herleitungssysteme für die ML zu entwickeln. Nun werden wir uns mit der *Semantik* der ML befassen. Eine Semantik für eine Sprache ist eine Methode, mithilfe der wir den Sätzen dieser Sprache Wahrheitswerte zuweisen. Eine Semantik für die ML ist also eine Methode, mithilfe derer wir den Sätzen der ML Wahrheitswerte zuordnen.

42.1 Interpretationen der ML

Die Grundidee der Semantik für die ML ist die folgende. In der ML sind Sätze nicht einfach nur wahr oder falsch. Ein Satz ist wahr oder falsch *in einer bestimmten möglichen Welt.* Und ein einzelner Satz kann in einigen Welten wahr und in anderen falsch sein. Wir sagen dann, dass $\Box\mathscr{A}$ wahr ist genau dann, wenn $\mathscr{A}$ in *jeder* möglichen Welt wahr ist, und $\Diamond\mathscr{A}$ wahr ist genau dann, wenn $\mathscr{A}$ in *zumindest einer* möglichen Welt wahr ist.

Das ist die Grundidee, die wir nun verfeinern und präzisieren müssen. Um dies zu tun, müssen wir den Begriff einer *Interpretation* der ML einführen. Das erste, was man in einer Interpretation haben muss, ist eine Menge von *möglichen Welten.* An diesem Punkt könnten Sie sich fragen: Was genau ist eine mögliche Welt? Die intuitive Idee ist, dass eine mögliche Welt eine Weise ist, wie diese Welt hätte sein können. Aber was genau bedeutet das? Dies ist eine ausgezeichnete philosophische Frage und wir werden uns später noch etwas mit ihr befassen. Aber wir brauchen uns im Moment nicht allzu viele Gedanken darüber zu machen, wie wir sie beantworten sollten. Was die formale Logik betrifft, so können mögliche Welten alles sein, was Sie wollen. Alles, was zählt, ist, dass Sie jeder Interpretation eine nicht leere Sammlung von Dingen liefern, die wir *mögliche Welten* nennen.

Wenn Sie Ihre Menge der möglichen Welten ausgewählt haben, müssen Sie einen Weg finden, um zu bestimmen, welche Sätze der ML in welchen möglichen Welten wahr sind. Um das zu tun, müssen wir den Begriff einer *Bewertungsfunktion* einführen. Diejenigen von Ihnen, die etwas Mathematik studiert haben, werden bereits mit der allgemeinen Idee einer Funktion vertraut sein. Aber für diejenigen unter Ihnen, die das noch nicht getan haben, ist eine Funktion ein mathematisches Objekt, welches Argumente auf bestimmte Werte abbildet. Das mag ein wenig abstrakt klingen, aber einige bekannte Beispiele werden Ihnen helfen. Nehmen Sie die Funktion $x + 1$. Das ist eine Funktion, die eine Zahl als Argument nimmt und dann die nächste Zahl als Wert ausspuckt. Wenn Sie also die Zahl 1 als Argument eingeben, spuckt die Funktion $x + 1$ die Zahl 2 als Wert aus; wenn Sie 2 eingeben, spuckt sie 3 aus; wenn Sie 3 eingeben, spuckt sie 4 aus; und so weiter Hier ist ein weiteres Beispiel: die Funktion $x + y$. Diesmal müssen Sie zwei Argumente in diese Funktion eingeben, wenn sie einen Wert zurück haben wollen: Wenn Sie 2 und 3 als Ihre Argumente eingeben, spuckt die Funktion 5 aus; wenn Sie 1003 und 2005 eingeben, dann spuckt sie 3008 aus; und so weiter.

Eine Bewertungsfunktion der ML nimmt einen Satz und eine Welt als ihre Argumente auf und spuckt dann einen Wahrheitswert als ihren Wert aus. Wenn also v eine Bewertungsfunktion und w eine mögliche Welt ist, ist $v_w(\mathscr{A})$ der Wahrheitswert, auf den v $\mathscr{A}$ und w abbildet: wenn $v_w(\mathscr{A}) = F$, dann ist $\mathscr{A}$ falsch in Welt w laut Bewertung v; wenn $v_w(\mathscr{A}) = T$, dann ist $\mathscr{A}$ wahr in Welt w laut Bewertung v.

Diese Bewertungsfunktionen dürfen jeden *einfachen* Satz auf jeden Wahrheitswert in jeder Welt abbilden. Aber es gibt Regeln dazu, welche Wahrheitswerte komplexeren Sätzen in einer Welt zugeordnet werden. Hier sind die Regeln für die Junktoren der WFL:

(1) $\nu_w(\neg\mathscr{A}) = T$ genau dann, wenn $\nu_w(\mathscr{A}) = F$

(2) $\nu_w(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) = T$ genau dann, wenn $\nu_w(\mathscr{A}) = T$ und $\nu_w(\mathscr{B}) = T$

(3) $\nu_w(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) = T$ genau dann, wenn $\nu_w(\mathscr{A}) = T$ oder $\nu_w(\mathscr{B}) = T$ (oder beides)

(4) $\nu_w(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) = T$ genau dann, wenn $\nu_w(\mathscr{A}) = F$ oder $\nu_w(\mathscr{B}) = T$

(5) $\nu_w(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) = T$ genau dann, wenn $\nu_w(\mathscr{A}) = T$ und $\nu_w(\mathscr{B}) = T$, oder $\nu_w(\mathscr{A}) = F$ und $\nu_w(\mathscr{B}) = F$

Bislang sollten diese Regeln Ihnen nicht zu neu sein. Im Wesentlichen funktionieren sie genau wie die Wahrheitstabellen für die WFL. Der einzige Unterschied besteht darin, dass unsere neuen Wahrheitstabellen-Regeln auf eine Welt nach der anderen angewendet werden müssen.

Aber was sind die Regeln für die neuen modalen Operatoren, $\Box$ und $\Diamond$? Die naheliegendste Idee wäre es, Regeln wie diese zu geben:

$$\nu_w(\Box\mathscr{A}) = T \text{ genau dann, wenn } \forall w'(\nu_{w'}(\mathscr{A}) = T)$$

$$\nu_w(\Diamond\mathscr{A}) = T \text{ genau dann, wenn } \exists w'(\nu_{w'}(\mathscr{A}) = T)$$

Dies ist nur die formale Art, die Idee zu formulieren, dass $\Box\mathscr{A}$ in w wahr ist, wenn und nur wenn $\mathscr{A}$ in jeder Welt wahr ist, und $\Diamond\mathscr{A}$ in w wahr ist, wenn und nur wenn $\mathscr{A}$ in zumindest einer Welt wahr ist.

Obwohl diese Regeln schön und einfach sind, erweisen sie sich jedoch nicht als sonderlich nützlich. Wie wir bereits erwähnt haben, ist die ML als ein sehr flexibles Werkzeug konzipiert. Es ist als allgemeiner Rahmen für den Umgang mit vielen verschiedenen Arten von Notwendigkeiten gedacht. Deshalb wollen wir, dass unsere semantischen Regeln für $\Box$ und $\Diamond$ etwas weniger starr sind. Wir können dies erreichen, indem wir einen weiteren neuen Begriff einführen: den der *Zugänglichkeitsbeziehung*.

Eine Zugänglichkeitsbeziehung, R, ist eine Beziehung zwischen möglichen Welten. Grob gesagt bedeutet Rw_1w_2 (im Deutschen: Welt w_1 *hat Zugang zu* Welt w_2), dass w_2 von w_1 als möglich erachtet wird. Mit anderen Worten: Durch die Einführung von Zugänglichkeitsbeziehungen können wir sagen, dass eine bestimmte Welt von manchen Welten aus als möglich erachtet wird, von anderen jedoch nicht. Dies erweist sich beim untersuchen modaler Systeme als eine *sehr* fruchtbare Idee. Wir können nun die folgenden semantischen Regeln für $\Box$ und $\Diamond$ angeben:

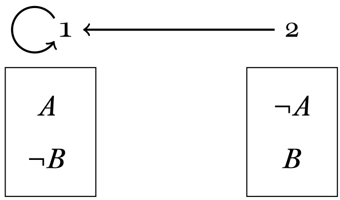
(6) $\nu_{w_1}(\Box\mathscr{A}) = T$ genau dann, wenn $\forall w_2(Rw_1w_2 \rightarrow \nu_{w_2}(\mathscr{A}) = T)$

(7) $\nu_{w_1}(\Diamond\mathscr{A}) = T$ genau dann, wenn $\exists w_2(Rw_1w_2 \land \nu_{w_2}(\mathscr{A}) = T)$

Im Deutschen: $\Box\mathscr{A}$ ist wahr in Welt w_1, wenn und nur wenn $\mathscr{A}$ in jeder von w_1 als möglich erachteten Welt wahr ist; und $\Diamond\mathscr{A}$ ist wahr in Welt w_1, wenn und nur wenn $\mathscr{A}$ in zumindest einer von w_1 als möglich erachteten Welt wahr ist.

Eine Interpretation für die ML besteht nun also aus drei Dingen: einer Menge möglicher Welten, W; einer Zugänglichkeitsbeziehung, R; und einer Bewertungsfunktion, ν. Die Menge 'möglicher Welten' kann eigentlich eine Sammlung von allem sein, was Ihnen gefällt. Es spielt keine Rolle, welche Dinge in diese Menge fallen, solange W nicht leer ist (für viele Zwecke ist es hilfreich, einfach eine Zahlenmenge als Menge der Welten zu nehmen). Und zumindest im Moment kann R jede beliebige Beziehung zwischen den Welten in W sein, die Ihnen gefällt. Es könnte eine Beziehung sein, die jede Welt in W zu jeder Welt in W in Relation setzt, oder eine, die keine Welt zu irgendeiner Welt in Relation setzt, oder irgendetwas dazwischen. Und schlieSSlich kann ν jeden beliebigen einfachen Satz der ML auf jeden beliebigen Wahrheitswert in jeder beliebigen Welt abbilden. Alles, was zählt, ist, dass v den Regeln (1)–(7) folgt, wenn es um die komplexeren Sätze geht.

Sehen wir uns ein Beispiel an. Es ist oft hilfreich, Interpretationen der ML in Form von Diagrammen wie diesem darzustellen:



So lesen Sie die Interpretation aus diesem Diagramm ab: Sie enthält nur zwei Welten, 1 und 2. Die Pfeile zwischen den Welten repräsentieren die Zugänglichkeitsbeziehung. 1 und 2 greifen also beide auf 1 zu (beide erachten 1 als möglich), aber weder 1 noch 2 greifen auf 2 zu (beide erachten 2 als nicht möglich). Die Kästchen unter den Welten zeigen uns an, welche einfachen Sätze in diesen Welten wahr sind: A ist wahr in 1, aber falsch in 2; B ist falsch in 1, aber wahr in 2. In solche Kästchen kann man nur einen einfachen Satz oder seine Negation schreiben, nicht beide. Aus den Wahrheitswerten der einfachen Sätze in unseren Welten, können wir ersehen, welche Wahrheitswerte die komplexeren Sätze in jeder Welt erhalten. Bei dieser Interpretation sind zum Beispiel alle folgenden Sätze in w_1 wahr:

$$A \wedge \neg B,\ B \rightarrow A,\ \Diamond A,\ \Box \neg B$$

Wenn Sie nicht diagrammatisch denken wollen, dann können Sie eine Interpretation auch wie folgt darstellen:

W: $1, 2$

R: $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle$

$$v_1(A) = T, v_2(B) = F, v_2(A) = F, v_2(B) = T$$

Sie werden in Kürze Gelegenheit haben, einige eigene Interpretationen zu erarbeiten, wenn wir uns mit *Gegeninterpretationen* befassen.

42.2 Eine Semantik für das System K

Wir können nun alle semantischen Begriffe der WFL auf die ML ausdehnen:

- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ ist MODAL GÜLTIG genau dann, wenn es in keiner Interpretation eine Welt gibt in der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ alle wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch ist.
- $\mathscr{A}$ ist eine MODALE WAHRHEIT genau dann, wenn $\mathscr{A}$ in jeder Welt jeder Interpretation wahr ist.
- $\mathscr{A}$ ist ein MODALER WIDERSPRUCH genau dann, wenn $\mathscr{A}$ in jeder Welt jeder Interpretation falsch ist.
- $\mathscr{A}$ ist MODAL ERFÜLLBAR genau dann, wenn $\mathscr{A}$ in zumindest einer von zumindest einer Interpretation wahr ist.

(Von nun an lassen wir die Qualifikationen ‘modal’, ‘modaler’ usw. weg.)

Wir können auch unsere Verwendung von $\vDash$ ausweiten. Allerdings müssen wir wieder Subskripte hinzufügen, so wie wir es mit $\vdash$ getan haben. Wenn wir also sagen wollen, dass $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ (modal) gültig ist, dann schreiben wir: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$.

Lassen Sie uns ein besseres Gefühl für die Semantik für das System **K**bekommen, indem wir einige Gegeninterpretationen durcharbeiten. Betrachten Sie die folgende (falsche) Behauptung:

$$\neg A \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$$

Um eine Gegeninterpretation zu dieser Behauptung vorzulegen, müssen wir uns eine Interpretation ausdenken, die $\neg A$ in irgendeiner Welt w wahr und $\neg\Diamond A$ in derselben Welt w falsch macht.

Hier ist eine solche Interpretation, dargestellt mittels eines Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ & & \\ \boxed{\neg A} & & \boxed{A} \end{array}$$

Es ist leicht einzusehen, dass dies eine Gegeninterpretation zu unserer Behauptung ist. Erstens, $\neg A$ ist wahr in Welt 1. Und zweitens ist $\neg\Diamond A$ falsch in 1: A ist wahr in 2, und 2 ist von 1 aus zugänglich. Es gibt also eine Welt in dieser Interpretation, in der $\neg A$ wahr und $\neg\Diamond A$ falsch ist. Also ist es nicht der Fall, dass $\neg A \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$.

Warum haben wir das Subskript **K**gewählt? Nun, es stellt sich heraus, dass es eine wichtige Beziehung zwischen dem System **K** und der Definition der Gültigkeit gibt, die wir gerade gegeben haben. Insbesondere gelten die folgenden beiden Ergebnisse:

- Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$
- Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$

Das erste Ergebnis wird als *Korrektheitsresultat* bezeichnet, da es uns sagt, dass die Herleitungsregeln des Systems **K** gute, solide Regeln sind: Wenn Sie ein Argument rechtfertigen können, indem Sie einen Beweis innerhalb des Systems **K**liefern, dann ist dieses Argument wirklich gültig. Das zweite Ergebnis ist als *Vollständigkeitsresultat* bekannt, da es uns sagt, dass die Regeln des Systems **K** ausreichend sind, um alle gültigen Argumente zu erfassen: wenn ein Argument gültig ist, dann ist es möglich, einen Beweis in **K** anzubieten, der es rechtfertigt.

Es ist natürlich eine Sache, diese Resultate anzupreisen, aber eine ganz andere, sie zu beweisen. Wir werden hier jedoch nicht versuchen, sie zu beweisen. Aber die Idee, die hinter dem Nachweis der Korrektheit steht, wird vielleicht deutlicher machen, wie strenge Unterbeweise funktionieren.

In einem strengen Unterbeweis dürfen wir keine Annahmen von auSSerhalb des strengen Unterbeweises verwenden, mit Ausnahme dessen, was wir mit □E in den strengen Unterbeweis 'importieren'. Wenn wir mit □E $\Box\mathscr{A}$ angenommen oder bewiesen haben, können wir mit □E $\mathscr{A}$ innerhalb eines strengen Unterbeweises verwenden. In **K**ist das die einzige Möglichkeit, einen Satz in einen strengen Unterbeweis zu importieren. Alles, was innerhalb eines strengen Unterbeweises bewiesen werden kann, muss also aus dem Satz $\mathscr{A}$ folgen, wobei wir auSSerhalb des strengen Unterbeweises eben $\Box\mathscr{A}$ haben. Stellen wir uns vor, dass wir darüber nachdenken, was in einer möglichen Welt in irgendeiner Interpretation wahr ist. Wenn wir wissen, dass $\Box\mathscr{A}$ in dieser möglichen Welt wahr ist, dann wissen wir, dass $\mathscr{A}$ in allen zugänglichen Welten wahr ist. Also ist alles, was innerhalb eines strengen Unterbeweises bewiesen wird, in allen zugänglichen möglichen Welten wahr. Deshalb ist □I eine solide Regel.

42.3 Eine Semantik für System T

Gerade haben wir gesagt, dass das System **K** korrekt und vollständig ist. Was bedeutet das für die anderen Modalsysteme, die wir untersucht haben, nämlich **T**, **S4** und **S5**? Nun, sie sind alle *inkorrekt*, relativ zu der Definition von Gültigkeit, die wir oben gegeben haben. Zum Beispiel erlauben uns all diese Systeme, A aus $\Box A$ abzuleiten, obwohl $\Box A \nvDash_{\mathbf{K}} A$.

Bedeutet das, dass diese Systeme eine Zeitverschwendung sind? Ganz und gar nicht! Diese Systeme sind nur inkorrekt *relativ zu der Definition der Gültigkeit, die wir oben gegeben haben.* (Oder, um Symbole zu verwenden, sie sind inkorrekt relativ zu $\vDash_{\mathbf{K}}$.) Wenn wir es also mit diesen stärkeren modalen Systemen zu tun haben, müssen wir unsere Definition der Gültigkeit anpassen, damit sie zu diesen Systemen passt. An dieser Stelle kommen uns die Zugänglichkeitsbeziehungen wirklich gelegen.

Als wir die Idee einer Zugänglichkeitsbeziehung einführten, sagten wir, dass es jede beliebige Beziehung zwischen Welten sein könnte, die Ihnen gefällt: Sie könnten jede Welt mit jeder Welt in Beziehung setzen, keine Welt mit irgendeiner Welt oder irgendetwas dazwischen. Dieses Bild der Zugänglichkeitsbeziehung war Hintergrund unserer Definition von $\vDash_{\mathbf{K}}$. Aber wenn wir wollen, können wir die Zugänglichkeitsbeziehung etwas einschränken. Beispielsweise können wir darauf bestehen, dass sie REFLEXIV sein muss:

- $\forall w Rww$

Zu Deutsch: jede Welt ist sich selbst zugänglich. Oder: jede Welt erachtet sich selbst als möglich. Wenn wir diese Einschränkung annehmen, können wir eine neue Definition der Gültigkeit, $\vDash_{\mathbf{T}}$, einführen:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$ genau dann, wenn es in keiner Interpretation, die eine reflexive Zugänglichkeitsbeziehung hat, eine Welt gibt in der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ alle wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch ist.

Wir haben das **T** Subskript an $\vDash$ angehängt, weil das System **T** korrekt und vollständig relativ zu dieser neuen Definition der Gültigkeit ist:

- Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$
- Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$

Wie vorher schon werden wir nicht versuchen, die Korrektheits- und Vollständigkeitsresultate zu beweisen. Es ist jedoch relativ leicht einzusehen, wie das Beharren darauf, dass die Zugänglichkeitsbeziehung reflexiv sein muss, die R**T**-Regel rechtfertigen wird:

m	$\Box\mathscr{A}$	
	$\mathscr{A}$	R**T** m

Um dies einzusehen, stellen Sie sich einfach vor, Sie versuchen, eine Gegeninterpretation zu dieser Behauptung zu finden.

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{A}$$

Hierzu müssten wir eine Welt konstruieren, w, in der $\Box\mathscr{A}$ wahr, aber $\mathscr{A}$ falsch ist. Wenn nun aber $\Box\mathscr{A}$ in w wahr ist, dann muss $\mathscr{A}$ in allen von w aus zugänglichen Welten wahr sein. Aber da die Zugänglichkeitsbeziehung reflexiv ist, ist w von w aus zugänglich. Also muss $\mathscr{A}$ in w wahr sein. Aber jetzt muss $\mathscr{A}$ in w wahr *und* falsch sein. Widerspruch!

42.4 Eine Semantik für S4

Wie sonst könnten wir an unserer Definition der Gültigkeit feilen? Nun, wir könnten auch festlegen, dass die Zugänglichkeitsbeziehung TRANSITIV sein muss:

▹ $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3((Rw_1w_2 \land Rw_2w_3) \rightarrow Rw_1w_3)$

Zu Deutsch: wenn w_1 Zugang zu w_2 hat, und w_2 Zugang zu w_3, dann hat w_1 Zugang zu w_3. Oder: wenn w_1 w_2 als möglich erachtet, und w_2 w_3 als möglich erachtet, dann erachtet w_1 auch w_3 als möglich. Wenn wir diese Einschränkung unserer Zugänglichkeitsbeziehung annehmen, dann können wir wieder eine neue Definition der Gültigkeit, $\vDash_{\mathbf{S4}}$, einführen:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$ genau dann, wenn es in keiner Interpretation, die eine reflexive und transitive Zugänglichkeitsbeziehung hat, eine Welt gibt in der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ alle wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch ist.

Wir haben das **S4** Subskript an $\vDash$ angehängt, weil das System **S4** korrekt und vollständig relativ zu dieser neuen Definition der Gültigkeit ist:

▹ Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$

▹ Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$

Wie vorher schon werden wir nicht versuchen, diese Resultate zu beweisen. Es ist jedoch relativ leicht zu erkennen, wie das Beharren darauf, dass die Zugänglichkeitsbeziehung transitiv sein muss, die **S4**-Regel rechtfertigt:

m	$\Box\mathscr{A}$		
		$\Box$	
		$\Box\mathscr{A}$	R**4** m

Die Idee, die den strengen Unterbeweisen zugrunde liegt, ist, dass Unterbeweise Wege sind, Dinge zu beweisen, die in allen zugänglichen Welten wahr sind. Die R**4**-Regel bedeutet also, dass immer dann, wenn $\Box\mathscr{A}$ wahr ist, $\Box\mathscr{A}$ in jeder zugänglichen Welt wahr ist. Mit anderen Worten, es muss sein, dass $\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\mathscr{A}$ gilt.

Um dies einzusehen, stellen Sie sich vor, dass Sie versuchen, eine Gegeninterpretation zu dieser Behauptung zu finden:

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\mathscr{A}$$

Hierzu müssten wir eine Welt konstruieren, w_1, in der $\Box\mathscr{A}$ wahr, aber $\Box\Box\mathscr{A}$ falsch ist. Wenn nun $\Box\Box\mathscr{A}$ in w_1 falsch ist, dann muss w_1 eine Welt, w_2, zugänglich sein, in der $\Box\mathscr{A}$ falsch ist. GleichermaSSen, wenn $\Box\mathscr{A}$ in w_2 falsch ist, dann muss w_2 eine Welt, w_3, zugänglich sein, in der $\mathscr{A}$ falsch ist. Wir haben gerade gesagt, dass w_1 auf w_2 und w_2 auf w_3 Zugang haben. Da wir nun aber darauf bestehen, dass die Zugänglichkeitsbeziehung transitiv ist, muss w_1 auf w_3 Zugang haben. Und da $\Box\mathscr{A}$ in w_1 wahr ist und w_3 von w_1 aus zugänglich ist, folgt daraus, dass $\mathscr{A}$ in w_3 wahr ist. Also ist $\mathscr{A}$ in w_3 wahr *und* falsch. Widerspruch!

42.5 Eine Semantik für S5

Lassen Sie uns die Zugänglichkeitsbeziehung noch auf eine weitere Art einschränken. Nun beharren wir darauf, dass sie SYMMETRISCH ist:

- $\forall w_1 \forall w_2 (Rw_1w_2 \rightarrow Rw_2w_1)$

Zu Deutsch: wenn w_1 Zugang zu w_2 hat, dann hat w_2 Zugang zu w_1. Oder: wenn w_2 von w_1 als möglich erachtet wird, dann wird w_1 von w_2 als möglich erachtet. Logiker*innen nennen eine Beziehung, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, eine ÄQUIVALENZBEZIEHUNG. Wir können nun eine neue Definition der Gültigkeit, $\vDash_{\mathbf{S5}}$, einführen:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$ genau dann, wenn es in keiner Interpretation, deren Zugänglichkeitsbeziehung eine Äquivalenzbeziehung ist, eine Welt gibt, in der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ alle wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch ist.

Wir haben das **S5** Subskript an $\vDash$ angehängt, weil das System **S5** relativ zu dieser neuen Definition der Gültigkeit komplett und vollständig ist:

- Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$
- Wenn $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$, dann $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$

Wie vorher schon werden wir nicht versuchen, diese Resultate zu beweisen. Es ist jedoch relativ leicht zu erkennen, wie das Beharren darauf, dass die Zugänglichkeitsbeziehung eine Äquivalenzbeziehung sein muss, die R5-Regel rechtfertigt:

$$
\begin{array}{r|l}
m & \neg\Box\mathscr{A} \\
 & \quad \begin{array}{|l}
\Box \\ \hline
\neg\Box\mathscr{A} \qquad \text{R5 } m
\end{array}
\end{array}
$$

Die Regel besagt, dass wenn $\mathscr{A}$ nicht notwendig ist, d.h. in einer zugänglichen Welt falsch ist, dann ist es in keiner zugänglichen Welt notwendig. Wir haben also $\neg\Box\mathscr{A} \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\neg\Box\mathscr{A}$.

Um dies einzusehen, stellen Sie sich vor, Sie versuchen eine Gegeninterpretation zu dieser Behauptung zu finden:

$$\neg\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S5}} \Box\neg\Box\mathscr{A}$$

Hierzu müssten wir eine Welt konstruieren, w_1, in der $\neg\Box\mathscr{A}$ wahr ist, aber $\Box\neg\Box\mathscr{A}$ falsch ist. Wenn nun $\neg\Box\mathscr{A}$ in w_1 wahr ist, dann muss w_1 zu irgendeiner Welt, w_2, Zugang haben, in der $\mathscr{A}$ falsch ist. GleichermaSSen, wenn $\Box\neg\Box\mathscr{A}$ in w_1 falsch ist, dann muss w_1 zu einer Welt, w_3, Zugang haben, in der $\neg\Box\mathscr{A}$ falsch ist. Da wir nun darauf bestehen, dass die Zugänglichkeitsbeziehung eine Äquivalenzbeziehung und somit *symmetrisch* ist, können wir daraus schlieSSen, dass w_3 zu w_1 Zugang hat. Somit hat w_3 zu w_1 und w_1 zu w_2 Zugang. Da wir nun wiederum darauf bestehen, dass die Zugänglichkeitsbeziehung eine Äquivalenzbeziehung und damit *transitiv* ist, können wir daraus herleiten, dass w_3 auf w_2 zugreift. Aber vorhin sagten wir, dass $\neg\Box\mathscr{A}$ in w_3 falsch ist, was impliziert, dass $\mathscr{A}$ in jeder Welt wahr ist, zu der w_3 Zugang hat. Also ist $\mathscr{A}$ wahr *und* falsch in w_2. Widerspruch!

In der Definition von $\vDash_{\mathbf{S5}}$ haben wir festgelegt, dass die Zugänglichkeitsbeziehung eine Äquivalenzbeziehung ist. Aber es gibt noch eine andere Möglichkeit, einen Gültigkeitsbegriff, der zu **S5**passt, zu kriegen. Anstatt festzulegen, dass die Zugänglichkeitsbeziehung eine Äquivalenzbeziehung ist, könnten wir festlegen, dass es sich um eine UNIVERSELLE Beziehung handelt:

▹ $\forall w_1 \forall w_2 R w_1 w_2$

Zu Deutsch: jede Welt hat zu jeder Welt Zugang. Oder: jede Welt erachtet jede Welt als möglich. Mit dieser Beschränkung der Zugänglichkeitesbeziehung hätten wir $\vDash_{\mathbf{S5}}$ wie folgt definieren können:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$ genau dann, wenn es in keiner Interpretation, die eine universelle Zugänglichkeitsbeziehung hat, eine Welt gibt, in der $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ alle wahr sind und $\mathscr{C}$ falsch ist.

Wenn wir $\vDash_{\mathbf{S5}}$ so definieren würden, würden wir für **S5**immer noch die gleichen Korrektheits- und Vollständigkeitsresultate erhalten. Was sagt uns das? Nun, es bedeutet, dass wir, wenn wir eine Art von Notwendigkeit untersuchen, laut der *jede* Welt relativ zu *jeder* Welt möglich ist, **S5**verwenden sollten. Darüber hinaus gehen die meisten Philosoph*innen davon aus, dass die Begriffe der Notwendigkeit, um die es ihnen am meisten geht, wie die *logische* Notwendigkeit und die *metaphysische* Notwendigkeit, genau von dieser Art sind. So ist **S5** das modale System, das die meisten Philosoph*innen die meiste Zeit nutzen.

Übungen

A. Legen Sie Gegeninterpretationen zu den folgenden falschen Behauptungen vor:

1. $\neg P \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond P$
2. $\Box(P \vee Q) \vDash_{\mathbf{K}} \Box P \vee \Box Q$
3. $\vDash_{\mathbf{K}} \neg\Box(A \wedge \neg A)$
4. $\Box A \vDash_{\mathbf{K}} A$

B. Legen Sie Gegeninterpretationen zu den folgenden falschen Behauptungen vor:

1. $\Diamond A \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Diamond A$
2. $\Diamond A, \Box(\Diamond A \rightarrow B) \vDash_{\mathbf{S4}} \Box B$

C. Legen Sie Gegeninterpretationen zu den folgenden falschen Behauptungen vor:

1. $\Box(M \to O), \Diamond M \vDash_{\mathbf{T}} O$
2. $\Box A \vDash_{\mathbf{T}} \Box\Box A$

Weitere Lektüre

Die modale Logik ist ein sehr groSSer Teilbereich der Logik. Wir haben nur an der Oberfläche gekratzt. Wenn Sie mehr über die modale Logik erfahren möchten, finden Sie hier einige Lehrbücher, die Sie konsultieren können.

▹ Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*, Oxford: Routledge.

▹ Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

▹ Garson, J. W. (2013). *Modal Logic for Philosophers*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Keiner dieser Autoren formuliert seine modalen Beweissysteme so, wie wir es getan haben, aber die ähnlichste Formulierung gibt Garson.

Anhang

Glossar

Antezedens Der Satz auf der linken Seite eines Konditionals.

Argument Eine Reihe an Sätzen, bestehend aus Prämissen und Schlussfolgerung.

beweisbare Inkonsistenz Sätze sind beweisbar inkonsistent genau dann, wenn man von ihnen einen Widerspruch herleiten kann.

beweisbare Äquivalenz Eine Eigenschaft von Satzpaaren, laut der jeder der beiden Sätze von dem jeweils anderen hergeleitet werden kann.

Bewertung Eine Zuordnung von Wahrheitswerten to zu bestimmten Satzbuchstaben.

Bikonditional Das Symbol $\leftrightarrow$, verwendet um Worte und Phrasen des Deutschen zu symbolisieren, die wie die deutsche Phrase '...wenn und nur wenn...' funktionieren; oder ein Satz, der mittels dieses Symbols gebildet wird.

Disjunkt Ein Satz, der mittels Disjunktion mit einem anderen kombiniert wird.

Disjunktion Das Symbol $\vee$, verwendet um Worte und Phrasen zu repräsentieren, die wie das deutsche Wort 'oder' funktionieren; oder ein Satz, der mittels dieses Symbols gebildet wird.

Domäne Die Mengen an Dingen, die wir in einer Symbolisierung der LEO voraussetzen oder die in einer Interpretation in die Spannweite der Quantoren fällt.

einfacher Satz Ein Ausdruck, der genutzt wird, um einen einfachen Satz zu repräsentieren; ein Satzbuchstabe in WFL oder ein n-stelliges Prädikat gefolgt von n Namen in der LEO.

Existenzquantor Das Symbol $\exists$ der LEO, genutzt, um die Existenz zu symbolisieren; $\exists x\, F(x)$ ist wahr genau dann, wenn zumindest ein Element der Domäne F ist.

Formel Ein Ausdruck der LEO, den induktiven Regeln in §26.2 entsprechend gebildet.

gebundene Variable Ein Vorkommnis einer Variable in einer Formel, welches im Geltungsbereich eines Quantors gefolgt von der gleichen Variable liegt.

Geltungsbereich (der LEO) Die Teilformel von einem Satz der LEO oder einer Formel der LEO, für den der relevante Operator der Hauptoperator ist.

gemeinsame Möglichkeit Eine Eigenschaft, die Sätze besitzen, wenn es einen Fall gibt, in dem sie alle wahr sind.

Gültigkeit Eine Eigenschaft von Argumenten, laut der die Schlussfolgerung eine Folge der Prämissen ist.

Gültigkeit (in der LEO) Eine Eigenschaft von Argumenten, laut der keine Interpretation die Prämissen wahr und die Schlussfolgerung falsch macht.

Gültigkeit (in der WFL) Eine Eigenschaft von Argumenten, laut der die komplette Wahrheitstabelle des Arguments keine Zeile enthält, in der die Prämissesn alle wahr sind und die Schlussfolgerung falsch (sodass keine Bewertung alle Prämissen wahr macht und die Schlussfolgerung falsch).

Hauptjunktor Der letzte Junktor, den Sie beim Zusammenbauen eines Satzes mittels induktiver Definition nutzen.

Hauptoperator Der Operator, der bei der Konstruktion von einem Satz der LEO oder einer Formel der LEO als Letzter genutzt wurde.

Interpretation Eine Spezifikation einer Domäne, zusammen mit den Objekten, die die Namesn benennen und den Objekten auf die die Prädikatse zutreffen.

Junktor Ein logischer Operator in der WFL, der genutzt wird, um Satzbuchstaben zu komplexeren Sätzen zu kombinieren.

komplette Wahrheitstabelle Eine Tabelle, die alle möglichen Wahrheitswerte zu einem Satz oder mehreren Sätzen der WFL zuordnet, mit einer Zeile für jede mögliche Bewertung aller Satzbuchstaben.

Konditional Das Symbol →, verwendet um Worte und Phrasen zu repräsentieren, die funktionieren wie die deutsche Phrase 'wenn…, dann…'; oder ein Satz, der mittels dieses Symbols gebildet wird.

Konjunkt Ein Satz kombiniert mit einem anderen Satz, mittels einer Konjunktion.

Konjunktion Das Symbol ∧, verwendet um Worte und Phrasen des Deutschen zu repräsentieren, die wie 'und' funktionieren; oder ein Satz, der mittels dieses Symbols gebildet wird.

Konsequens Der Satz auf der rechten Seite eines Konditionals.

Konsistenz (in der LEO) Eine Eigenschaft von Sätzen der LEO, laut der diese Sätze in zumindest einer Interpretation gemeinsam wahr sind.

Konsistenz (in der WFL) Eine Eigenschaft von Sätzen der WFL, laut der die komplette Wahrheitstabelle dieser Sätze eine Zeile enthält, in der all diese Sätze wahr sind (sodass zumindest eine Bewertung alle Sätze wahr macht).

kontingenter Satz Ein Satz, der weder eine notwendige Wahrheit, noch eine notwendige Falschheit, ist; ein Satz der in manchen Fällen wahr ist und in anderen falsch.

Korrektheit Eine Eigenschaft von Argumenten, laut der das Argument gültig ist und alle seine Prämissen wahr sind.

leeres Prädikat Ein Prädikat, das auf kein Objekt in der Domäne zutrifft.

Metasprache Eine Sprache, die wir nutzen, um über eine Objektsprache zu reden. In diesem Lehrbuch ist die Metasprache Deutsch, ergänzt durch bestimmte Symbole wie Metavariablen und Fachbegriffe wie 'ist gültig'.

Metavariable Eine Variable in der Metasprache, die jeden beliebigen Satz der Objektsprache repräsentieren kann.

Name Ein Symbol der LEO, genutzt, um auf ein Individuum in der Domäne zu verweisen.

Negation Das Symbol ¬, verwendet um Worte und Phrasen zu repräsentieren, die wie das deutsche Wort 'nicht' funktionieren.

notwendige Falschheit Ein Satz, der in jedem Fall falsch ist (d.h.keinem Fall wahr ist)..

notwendige Wahrheit Ein Satz, der in jedem Fall wahr ist.

notwendige Äquivalenz Eine Eigenschaft zweier Sätze, laut der diese zwei Sätze in jedem Fall entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Objektsprache Eine Sprache, die wir zum Objekt unserer Untersuchung machen. In diesem Lehrbuch sind die Objektsprachen WFL, LEO und ML.

Prädikat Ein Symbol der LEO, genutzt, um eine Eigenschaft oder Beziehung auszudrücken.

Prämisse Ein Satz in einem Argument, der nicht als Schlussfolgerung dient.

Prämissenwort Ein Wort oder eine Phrase wie 'weil', welche(s) häufig genutzt wird, um aufzuzeigen, dass das was folgt die Prämisse eines Arguments ist.

Satz der LEO Eine Formel der LEO, welcher keine ungebundene Variables beinhaltet.

Satz der WFL Eine Reihe von Symbolen der WFL, die nach den induktiven Regeln gebaut werden kann, die auf S.53 angegeben sind.

Satzbuchstabe Ein Buchstabe, der genutzt wird, um einen einfachen Satz in WFL zu symbolisieren.

Schlussfolgerung Der letzte Satz eines Arguments.

Schlussfolgerungswort Ein Wort oder eine Phrase wie 'also', welche(s) häufig genutzt wird, um aufzuzeigen, dass das was folgt die Schlussfolgerung eines Arguments ist.

Substitutionsinstanz Das Resultat des Ersetzens jedes ungebundenen Vorkommnisses einer Variable in einer Formel mit einem Namen.

Symbolisierungsschlüssel Eine Liste, die zeigt, welche deutschen Sätze von welchen Satzbuchstaben der WFL symbolisiert werden.

Tautologie (in der LEO) Ein Satz der LEO, der in jeder Interpretation wahr ist.

Tautologie (in der WFL) Ein Satz der WFL, der nur Ts in der Spalte unter dem Hauptjunktor seiner kompletten Wahrheitstabelle hat; ein Satz, der jeder Bewertung nach wahr ist.

Term Entweder ein Name oder eine Variable.

Theorem Ein Satz, der ohne Prämissen hergeleitet werden kann.

ungebundene Variable Ein Vorkommnis einer Variable in einer Formel, welche keine gebundene Variable ist.

Ungültigkeit Eine Eigenschaft von Argumenten, laut der die Schlussfolgerung keine Folge der Prämissen ist; das Gegenteil von Gültigkeit.

Universalquantor Das Symbol $\forall$ der LEO, genutzt, um die Allgemeinheit zu symbolisieren; $\forall x\, F(x)$ ist wahr genau dann, wenn jedes Element der Domäne F ist.

Variable Ein Symbol der LEO, welches nach Quantoren und als Platzhalter in einfachen Sätzen genutzt wird; kursive Kleinbuchstaben zwischen s und z.

Vollständigkeit Ein Eigenschaft eines logischen Systems, laut dem $\vDash$ $\vdash$ zur Folge hat.

Wahrheitsfunktionaler Junktor Ein Symbol, welches komplexere Sätze aus einfacheren Sätzen bildet und die Wahrheitswerte der resultierenden Sätze nur mittels der Wahrheitswerte der einfächeren Sätze bestimmt..

Wahrheitswert Einer von zwei Werten, die Sätze haben können: Wahr und Falsch.

Widerspruch (in der LEO) Ein Satz der LEO, der in jeder Interpretation falsch ist.

Widerspruch (in der WFL) Ein Satz der WFL, der nur Fen in der Spalte unter dem Hauptjunktor seiner kompletten Wahrheitstabelle hat; ein Satz der WFL, der jeder Bewertung nach falsch ist.

Äquivalenz (in der LEO) Eine Eigenschaft von zwei Sätzen der LEO, laut der die Sätze in jeder Interpretation den gleichen Wahrheitswert haben.

Äquivalenz (in der WFL) Eine Eigenschaft von zwei Sätzen der WFL, laut der die komplette Wahrheitstabelle für diese Sätze identische Spalten unter den Hauptjunktoren hat (sodass die Sätze jeder Bewertung nach den gleichen Wahrheitswert haben).

Schnellüberblick

Charakteristische Wahrheitstabellen

$\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A}$
T	F
F	T

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$	$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

Symbolisierungen

Junktoren

Es ist nicht der Fall, dass P	$\neg P$
(Entweder) P oder Q	$(P \lor Q)$
Weder P noch Q	$\neg(P \lor Q)$ or $(\neg P \land \neg Q)$
P und Q	$(P \land Q)$
Wenn P, dann Q	$(P \rightarrow Q)$
P nur wenn Q	$(P \rightarrow Q)$
P genau dann, wenn Q	$(P \leftrightarrow Q)$
P, es sei denn, Q	$(P \lor Q)$

Prädikate

Alle Fs sind Gs	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$
Manche Fs sind Gs	$\exists x(F(x) \land G(x))$
Nicht alle Fs sind Gs	$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ or $\exists x(F(x) \land \neg G(x))$
Keine Fs sind Gs	$\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$ or $\neg\exists x(F(x) \land G(x))$

Identität

Nur c ist G	$\forall x(G(x) \leftrightarrow x = c)$
Alles außer c ist G	$\forall x(\neg x = c \rightarrow G(x))$
Der/das/die F ist G	$\exists x(F(x) \land \forall y(F(y) \rightarrow x = y) \land G(x))$
Es ist nicht der Fall, dass der/das/die F G ist	$\neg\exists x(F(x) \land \forall y(F(y) \rightarrow x = y) \land G(x))$
Der/das/die F ist kein G	$\exists x(F(x) \land \forall y(F(y) \rightarrow x = y) \land \neg G(x))$

Identität nutzen um Quantitäten zu symbolisieren

Es gibt zumindest _____ Fs.

ein	$\exists x\, F(x)$
zwei	$\exists x_1 \exists x_2 (F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \neg x_1 = x_2)$
drei	$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge$ $\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3)$
vier	$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge F(x_4) \wedge$ $\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_1 = x_4 \wedge$ $\neg x_2 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_4 \wedge \neg x_3 = x_4)$
n	$\exists x_1 \ldots \exists x_n (F(x_1) \wedge \ldots \wedge F(x_n) \wedge$ $\neg x_1 = x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_{n-1} = x_n)$

Es gibt zumeist _____ Fs.

Einen Weg ‘es gibt zumeist n Fs’ zu symbolisieren ist eine Negation vor die Symbolisierung von ‘es gibt zumindest $n + 1$ Fs’ zu stellen. Äquivalenterweise können wir auch anbieten:

ein	$\forall x_1 \forall x_2 \big[(F(x_1) \wedge F(x_2)) \rightarrow x_1 = x_2\big]$
zwei	$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \big[(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3)) \rightarrow$ $(x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)\big]$
drei	$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \big[(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge F(x_4)) \rightarrow$ $(x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_1 = x_4 \vee$ $x_2 = x_3 \vee x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4)\big]$
n	$\forall x_1 \ldots \forall x_{n+1} \big[(F(x_1) \wedge \ldots \wedge F(x_{n+1})) \rightarrow$ $(x_1 = x_2 \vee \ldots \vee x_n = x_{n+1})\big]$

Es gibt genau _____ Fs.

Einen Weg ‘es gibt genau n Fs’ auszudrücken ist die zwei Symbolisierungen zu konjunktieren und zu sagen ‘es gibt zumindest n Fs und zumeist n Fs.’ Die folgenden Sätze sind äquivalent dazu:

null	$\forall x \neg F(x)$
ein	$\exists x\big[F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y)\big]$
zwei	$\exists x_1 \exists x_2\big[F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge$
	$\neg x_1 = x_2 \wedge \forall y\big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2)\big)\big]$
drei	$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\big[F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge$
	$\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3 \wedge$
	$\forall y\big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)\big)\big]$
n	$\exists x_1 \ldots \exists x_n\big[F(x_1) \wedge \ldots \wedge F(x_n) \wedge$
	$\neg x_1 = x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_{n-1} = x_n \wedge$
	$\forall y\big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)\big)\big]$

Grundregeln für Beweise in der WFL

Wiederholung

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} & \text{R } m \end{array}$$

Konjunktion

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \wedge\text{I } m, n \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{B} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

Konditional

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \mathscr{B} & \\ & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}} & \rightarrow\text{I } i\text{–}j \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \rightarrow\text{E } m, n \end{array}$$

Negation

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \bot & \\ & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathscr{A}} & \neg\text{I } i\text{–}j \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\mathscr{A} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \bot & \neg\text{E } m, n \end{array}$$

Indirekter Beweis

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \neg\mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \bot & \\ & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A}} & \text{IB } i\text{–}j \end{array}$$

Explosion

$$\begin{array}{r|ll} m & \bot & \\ & \mathscr{A} & \text{X } m \end{array}$$

Disjunktion

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \vee\mathrm{I}\ m
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{B} \vee \mathscr{A} & \vee\mathrm{I}\ m
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \\
i & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{A} \\ \hline \end{array} & \\
j & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{C} \end{array} & \\
k & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{B} \\ \hline \end{array} & \\
l & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{C} \end{array} & \\
 & \mathscr{C} & \vee\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}$$

Bikonditional

$$\begin{array}{r|ll}
i & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{A} \\ \hline \end{array} & \\
j & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{B} \end{array} & \\
k & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{B} \\ \hline \end{array} & \\
l & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{A} \end{array} & \\
 & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \leftrightarrow\mathrm{I}\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\
n & \mathscr{A} & \\
 & \mathscr{B} & \leftrightarrow\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\
n & \mathscr{B} & \\
 & \mathscr{A} & \leftrightarrow\mathrm{E}\ m,\ n
\end{array}$$

Abgeleitete Regeln der WFL

Disjunktiver Syllogismus

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \\
n & \neg\mathscr{A} & \\
 & \mathscr{B} & \text{DS } m,\ n
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \\
n & \neg\mathscr{B} & \\
 & \mathscr{A} & \text{DS } m,\ n
\end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & \\
n & \neg\mathscr{B} & \\
 & \neg\mathscr{A} & \text{MT } m,\ n
\end{array}$$

Doppelnegationseliminierung

$$\begin{array}{r|ll}
m & \neg\neg\mathscr{A} & \\
 & \mathscr{A} & \text{DNE } m
\end{array}$$

Ausgeschlossenes Drittes

$$\begin{array}{r|l|ll}
i & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3}
j & & \mathscr{B} & \\
k & & \neg\mathscr{A} & \\ \cline{3-3}
l & & \mathscr{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{B}} & \text{GAD } i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}$$

De Morgan Regeln

$$\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) & \\
 & \neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B} & \\
 & \neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) & \text{DeM } m
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \\
 & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \\
 & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \text{DeM } m
\end{array}$$

Grundregeln der LEO

Universaleliminierung

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \forall\mathrm{E}\ m \end{array}$$

Existenzeinführung

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\ & \exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) & \exists\mathrm{I}\ m \end{array}$$

x darf nicht in $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ vorkommen

Universaleinführung

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\ & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \forall\mathrm{I}\ m \end{array}$$

c darf nicht in einer ungetilgten Annahme vorkommen

x darf nicht in $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ vorkommen

Existenzeliminierung

$$\begin{array}{r|l|l} m & \exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \\ i & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) \\ \hline \end{array} & \\ j & \quad\begin{array}{|l} \mathscr{B} \end{array} & \\ & \mathscr{B} & \exists\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j \end{array}$$

c darf weder in $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$, in $\mathscr{B}$, noch in einer ungetilgten Annahme vorkommen

Identitätseinführung

$$\begin{array}{|ll} c = c & =\mathrm{I} \end{array}$$

Identitätseliminierung

$$\begin{array}{r|ll} m & a = b & \\ n & \mathscr{A}(\ldots a \ldots a \ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots b \ldots a \ldots) & =\mathrm{E}\ m,\ n \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & a = b & \\ n & \mathscr{A}(\ldots b \ldots b \ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots a \ldots b \ldots) & =\mathrm{E}\ m,\ n \end{array}$$

Abgeleitete Regeln der LEO

$$\begin{array}{l|ll} m & \forall x \neg \mathscr{A} & \\ & \neg \exists x \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} m & \exists x \neg \mathscr{A} & \\ & \neg \forall x \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} m & \neg \exists x \mathscr{A} & \\ & \forall x \neg \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} m & \neg \forall x \mathscr{A} & \\ & \exists x \neg \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$